

LV олимпијада

1. Нека $a_0 < a_1 < a_2 < \dots$ е бесконечна низа природни броеви. Докажи, дека постои точно еден природен број n таков што важи

$$a_n < \frac{a_0 + a_1 + \dots + a_n}{n} \leq a_{n+1}.$$

Решение. Да означиме $s_n = a_0 + a_1 + \dots + a_n$. Условот $a_n < \frac{s_n}{n} \leq a_{n+1}$, по множењето со n го добива обликот $na_n - s_n < 0 \leq na_{n+1} - s_n$, т.е. $f_n < 0 \leq f_{n+1}$, каде $f_n = na_n - s_n$. Од

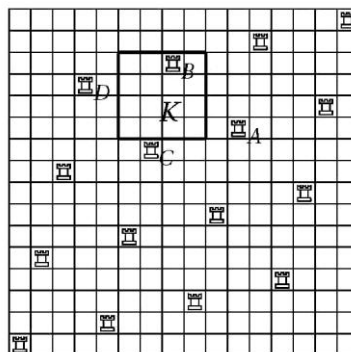
$$f_{n+1} - f_n = n(a_{n+1} - a_n) > 0$$

следува дека низата $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ строго монотонно расте, при што $f_0 = -a_0 < 0$. Според тоа, бројот 0 припаѓа точно на еден од интервалите $(f_n, f_{n+1}]$, од што следува тврдењето на задачата.

2. Даден е природен број $n \geq 2$. Разгледуваме шаховска табла $n \times n$ која се состои од n^2 полиња. За распоредот на n топови на таблата ќе велиме дека е *мирољублив* ако во секој ред и во секоја колона се наоѓа точно едан топ. Определи го најголемиот природен број k таков што за секој мирољублив распоред на n топови постои квадрат $k \times k$ кој не содржи топ ниту на едно од своите k^2 полиња.

Решение. Прво ќе докажеме дека за $k^2 < n$ таков квадрат секогаш постои. За произволен мирољубив распоред, го разгледуваме полето A на првата колона во кое се наоѓа топ, како и k последователни редови кои го содржат ова поле. Унијата на овие k редови е правоаголник $k \times n$ со точно k топови. Од овој правоаголник да го отстраниме полето A . Остатокот содржи $k-1$ топови, но од него може да се исечат k дисјунктни квадрати $k \times k$, од којих барем еден мора да биде празен.

Сега за $n = k^2$ ($k > 1$) ќе конструираме мирољубив распоред во кој бараниот квадрат не постои. Со (a, b) да го означиме полето во $(a+1)$ -от ред и $(b+1)$ -та колона. За секој $0 \leq i, j \leq k$ ќе ставиме топ во полето $(ik + j, jk + i)$. Бидејќи секој цел број од 0 до $n-1$ може на единствен начин да се запише во облик $ik + j$, овој распоред навистина е мирољубив.



Останува да докажеме дека во секој квадрат $k \times k$ се наоѓа барем еден топ. Да го разгледаме квадратот K со долно лево поле $(a, b), 0 \leq a, b \leq k^2 - k + 1$. Постои поле $A(x, y)$ со $x \geq a$ и $y \geq b$ на кое се наоѓа топ. Разгледуваме такво поле со најмал збир $x + y$. Да претпоставиме дека полето A е надвор од квадратот K . Без ограничување на општоста можеме да земеме дека $x \geq a + k$. По конструкција, на полињата

$$B(x - k + 1, y + k - 1), C(x - k, y - 1) \text{ и } D(x - 2k + 1, y + k - 2)$$

исто така се наоѓаат топови (ако се на таблата). Од условот за минималност на полето A следува дека $x - 2k + 1 < a$ и $y - 1 < b$, од каде добиваме $x \leq a + 2k - 2$ и $y = b$, но, тогаш квадратот K содржи поле B на кој има топ.

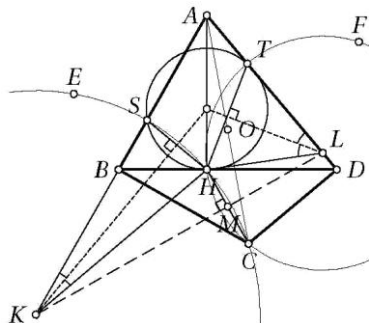
Конечно, за $n < k^2$, со бришење на првите $k^2 - n$ редови и првите $k^2 - n$ колони од опишаниот распоред добиваме распоред со најмногу n топови таков што ниту еден квадрат $k \times k$ не е празен. Овој распоред по потреба може да се дополни до мирољубливо биективно спарување на празните колони и празните редови. Според тоа, одговорот е најголемиот k за кој $k^2 < n$, т.е. $k = \lceil \sqrt{n-1} \rceil$.

3. Во конвексен четириаголник $ABCD$ важи $\angle ABC = \angle CDA = 90^\circ$. Точката H е подножје на нормалата повлечена од точката A на правата BD . Точките S и T припаѓаат соодветно на страните AB и AD и се такви што H е во внатрешноста на триаголникот SCT и важи

$$\angle CHS - \angle CSB = 90^\circ \text{ и } \angle THS - \angle DTC = 90^\circ.$$

Докажи дека правата BD ја допира опишаната кружница на триаголникот TSH .

Решение. *Прв начин.* Нека K е центар на опишаната кружница на триаголникот CHS . Од $\angle KSC = \angle SHC - 90^\circ = \angle BSC$ следува дека K лежи на правата AB . Аналогно, центарот на опишаната кружница на триаголникот CHT лежи на правата AD . Точките K и L лежат на симетралата на отсечката CH , како и средината M на отсечката CH .



Опишаната кружница околу $\triangle SHT$ ја допира правата BD ако и само ако симетралите на страните SH и TH се сечат на правата AH . Бидејќи овие две симетрали воедно се и симетрали на $\angle AKH$ и $\angle ALH$, доволно е да се докаже дека $\frac{KA}{KH} = \frac{LA}{LH}$.

Центарот O на опишаната кружница на $\triangle ABD$ е средина на отсечката AC , па затоа $MO \parallel AH$. Значи, MO е симетрала на отсечката BD и $\overline{MB} = \overline{MD}$.

Точките B и M се на кружница над дијаметар KC , па затоа $\overline{KC} = \frac{\overline{MB}}{\sin \angle AKL}$.

Аналогно, $\overline{LC} = \frac{\overline{MD}}{\sin \angle ALK}$. Сега $\frac{\overline{KH}}{\overline{LH}} = \frac{\overline{KC}}{\overline{LC}} = \frac{\overline{MB} \sin \angle ALK}{\overline{MD} \sin \angle AKL} = \frac{\sin \angle ALK}{\sin \angle AKL} = \frac{\overline{KA}}{\overline{LA}}$, што и требаше да се докаже.

Втор начин. Ќе ги користиме ознаките како во првиот начин на решавање, како и равенството $\overline{MB} = \overline{MD}$. Нека E и F се симетричните точки на точката H во однос на AB и AD , соодветно. Ако E_1 и F_1 се соодветно средините на отсечките HE и HF , тогаш

$$\overline{CE} = 2\overline{ME_1} = 2\overline{MB} = 2\overline{MD} = 2\overline{MF_1} = \overline{CF}.$$

Кружницата EHF има центар во точката A и ја допира BD во точката H , па доволно е да докажеме дека кружниците SHT и EHF се допираат во точката H .

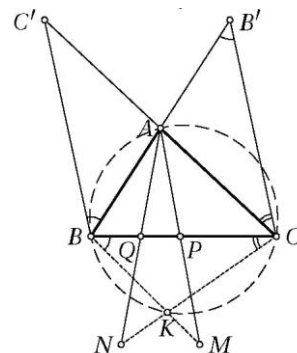
Земаме инверзија со центар H и радиус CE . Точките E и F се пресликуваат во себе, точката H во H' , а точките S и T во пресеците S' и T' на симетралите на $\angle ECH'$ и $\angle FCH'$ со отсечките EH' и FH' , соодветно. Од $\frac{\overline{H'S'}}{\overline{S'E}} = \frac{\overline{H'C}}{\overline{CE}} = \frac{\overline{H'C}}{\overline{CF}} = \frac{\overline{H'T'}}{\overline{T'F}}$ следува дека $S'T' \parallel EF$. Според тоа, кружниците $S'H'T'$ и $EH'F$ се хомотетични со центар H' , па затоа се допираат во H' , од каде што следува тврдењето на задачата.

4. Точките P и Q на страната BC на остроаголниот триаголник ABC се такви што важи $\angle PAB = \angle BCA$ и $\angle CAQ = \angle ABC$. Точките M и N на правите AP и AQ , соодветно, се такви што точката P е средина на отсечката AM , а точката Q е средина на отсечката AN . Докажи дека правите BM и CN се сечат на опишаната кружница на триаголникот ABC .

Решение. Триаголникот PBA по конструкција е сличен со триаголникот ABC . Во оваа сличност на точката M соодветствува точката C' симетрична на точката C во однос на A , од каде што следува $\angle MBP = \angle ABC'$. Слично, важи $\angle NCQ = \angle ACB'$, каде B' е симетричната точка на B во однос на A . Ако правите BM и CN се сечат во точката K , тогаш

$$\begin{aligned} 180^\circ - \angle BKC &= \angle KBC + \angle KCB = \angle ABC' + \angle ACB' \\ &= \angle AB'C + \angle ACB' = \angle BAC, \end{aligned}$$

што значи дека четириаголникот $BACK$ е тетивен.



5. Кејптаунската банка издава монети со вредност $\frac{1}{n}$ за секој природен број n . Ако имаме конечно многу такви монети (не задолжително со различни вредности) со вкупна вредност не поголема од $99 + \frac{1}{2}$, докажи дека можеме да ги поделиме во најмногу 100 групи тако што вкупната вредност на монетите во секоја група не е поголема од 1.

Решение. Ќе докажеме дека, ако вкупната вредност на монетите е $n - \frac{1}{2}$ за некој $n \in \mathbb{N}$, тогаш монетите можеме да ги поделиме во n групи во секоја од кои сумата не е поголема од 1. Монетите со вредност 1 се групи сами за себе, па можеме да сметаме дека такви монети нема. Понатаму, ако имаме $d > 1$ монети со вредност $\frac{1}{k}$, каде $d | k$, тогаш можеме да ги замениме со една монета со вредност $\frac{1}{e}$ за $e = \frac{k}{d}$. На овој начин можеме да претпоставиме дека:

(1) монета со вредност $\frac{1}{2k-1}$, $k \in \mathbb{N}$ се појавува најмногу $2k - 2$ пати, и

(2) монета со вредност $\frac{1}{2k}$, $k \in \mathbb{N}$ се појавува најмногу еднаш.

За $k = 1, \dots, n$, во k -тата група ги ставаме сите монети со вредност $\frac{1}{2k-1}$ и $\frac{1}{2k}$ и вкупната сума во оваа група не е поголема од $\frac{2k-2}{2k-1} + \frac{1}{2k} < 1$. Преостанатите монети, кои се со вредности помали од $\frac{1}{2n}$, ќе ги распоредуваме една по една. Да земеме една од овие монети. Барем во една група сумата не е поголема од $\frac{1}{n}(n - \frac{1}{2}) = 1 - \frac{1}{2n}$, па оваа монета ќе ја ставиме во таа група. На овој начин ја завршуваме поделбата.

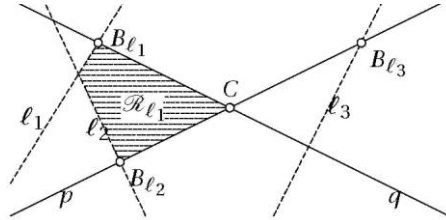
6. За множеството прави во рамнината ќе велиме дека се во општа положба ако никои две прави не се паралелни и никои три не минуваат низ иста точка. Множеството прави во општа положба ја дели рамнината на области; *ограничени* области во поделбата ги нарекуваме оние кои имаат конечна плоштина. Докажи дека за секој доволно голем n , во секое множество од n прави во општа положба може да се обојат во сино барем \sqrt{n} прави така што ниту една од ограничените области во поделбата нема потполно сина граница.

Решение. Пресечната точка на две сини прави ја нарекуваме *сина*. Да претпоставиме дека сме обоиле k прави и дека веќе ниту една права не може да се обои без да се наруши условот на задачата. Тоа значи дека за секоја необоена права ℓ постои ограничена област R_ℓ чија единствена необоена страна лежи на ℓ . Нека A_ℓ, B_ℓ, C_ℓ се три последователни темиња на областа R_ℓ во насока на движењето на стрелките на часовникот, при што A_ℓ и B_ℓ лежат на пра-

вата ℓ . На правата ℓ и доделуваме сина точка C_ℓ . Ќе докажеме дека секоја сина точка е доделена најмногу на две прави. Бидејќи сини точки има $\binom{k}{2}$, а необоени прави $n-k$, ќе следува дека

$$n-k \leq 2\binom{k}{2} = k(k-1), \text{ т.е. } k^2 \geq n.$$

Да го претпоставиме спротивното, т.е. дека постојат три прави ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 на кои им е доделена иста точка $C = C_{\ell_1} = C_{\ell_2} = C_{\ell_3}$. Нека пра-



вите p и q се сечат во точката C . Точките $B_{\ell_1}, B_{\ell_2}, B_{\ell_3}$ се различни и лежат на сини прави p и q , при што на отсечките CB_{ℓ_i} ($i = 1, 2, 3$) нема други пресечни точки на дадените прави. Нека B_{ℓ_2} и B_{ℓ_3} лежат на правата p . Четирите последователни страни на областа R_{ℓ_1} во насока на движењето на стрелките на часовникот се ℓ_1, p, q и (без ограничување на општоста) ℓ_2 , па оваа област има две необоени страни, што е спротивно на претпоставката.