# Лежандрова функција. Броеви на Ферма и броеви на Мерсен

Даниел Велинов, Градежен факултет, Скопје

## Лежандрова функција (Legendre's function)

Нека $p$ е прост број. За било кој позитивен цел број $n$, со $e_p(n)$ ќе го означуваме експонентот на $p$ во факторизацијата на $n!$. Аритметичката функција $e_p(n)$ се нарекува Лежанрова функција придружена на простиот број $p$.

**Пропозиција1.** (Лежандрова формула) За секој прост број $p$ и природен број $n$, важи

$$e_p(n)=\sum_{i\geq 1}\left[\frac{n}{p^i}\right]=\left[\frac{n}{p}\right]+\left[\frac{n}{p^2}\right]+\left[\frac{n}{p^3}\right]+\ldots \quad .$$

Да забележиме дека сумата е конечна бидејќи за доволно големо $m$, такво што $n<p^m$, сите членови после $\left[\frac{n}{p^m}\right]$ заедно со него се $0$.

**Пример 1.** (Harvard-MIT Tournament, 2003) Најди го најголемиот $n$ така што $n!$ завршува на $290$ нули.

Имаме $290=e_5(n)=\left[\frac{n}{5}\right]+\left[\frac{n}{5^2}\right]+\left[\frac{n}{5^3}\right]+\ldots$ што грубо разгледувано е геометриски ред чија сума приближно е $\frac{\frac{n}{5}}{1-\frac{1}{5}}\approx 290$, односно приближно $n=1160$. Со проверка добиваме дека $e_5(1160)=288$. Додавајќи уште 10 на $n$ добиваме дека $e_5(1170)=290$, па бараниот број е $n=1170$.

**Пример2.** Нека $m$ и $n$ се природни броеви. Докажи дека $m!(n!)^m \mid (mn)!$.

Нека $p$ е прост број. Нека $x$ и $y$ се природни броеви заедно со нулата така да $p^x \mid m!\cdot(n!)^m$ и $p^y \mid (mn)!$. Доволно е да докажеме дека $x=e_p(m)+e_p(n)$ и $y=e_p(mn)$. Доволно е да покажеме дека

$$\sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{mn}{p^i}\right]\geq\sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{m}{p^i}\right]+m\sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{n}{p^i}\right].$$

Ако $p>n$ вториот собирок на десната страна е $0$, па неравенството очигледно важи. Претпоставуваме дека $p\leq n$. Нека $s$ позитивен број таков што важи $p^s\leq n<p^{s+1}$. Имаме,

$$\sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{mn}{p^i}\right]=\sum_{i=1}^{s}\left[m\cdot\frac{n}{p^i}\right]+\sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{m}{p^i}\cdot\frac{n}{p^s}\right]\geq m\sum_{i=1}^{s}\left[\frac{n}{p^i}\right]+\sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{m}{p^i}\right]\left[\frac{n}{p^s}\right]\geq$$
$$\geq m\sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{n}{p^i}\right]+\sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{m}{p^i}\right]$$

што и требаше да се докаже.

Понатаму ќе бидат разгледани броевите на Ферма, броевите на Мерсен и совршени броеви, како важен дел од теоријата на броеви.

**Броеви на Ферма**

Пробувајќи да ги најде сите прости броеви од облик $2^m+1$, Ферма забележал дека $m$ мора да биде степен со основа $2$. Навистина, $m=kh$, $k$ е непарен број поголем од $1$ , тогаш

$2^m+1=(2^h)^k+1=(2^h+1)(2^{h(k-1)}-2^{h(k-2)}+...-2^h+1)$, па

$2^m+1$ нема да биде прост. Броевите $f_n=2^{2^n}+1, n\geq 0$ се нарекуваат броеви на Ферма. Имаме, $f_0=3, f_1=5, f_2=17, f_3=257, f_4=65537, f_5=4294967297$.

После проверката дека овие пет броеви се прости, Ферма заклучил дека $f_n$ е прост број за секој $n\in\mathbb{N}$. Но, Ојлер покажал дека $641\mid f_5$. Неговиот доказ бил следниот:

$$f_5=2^{32}+1=2^{28}(5^4+2^4)-(5\cdot 2^7)^4+1=2^{28}\cdot 641-(640^4-1)=$$
$$=641(2^{28}-639(640^2+1)).$$

Сеуште како отворен проблем стои дали бројот на броеви на Ферма е конечен или бесконечен. Одговорот на овој проблем е многу важен бидејќи Гаус докажал дека правилен многуаголник $Q_1Q_2...Q_n$ може да се конструира користејќи линијар и шестар ако и само ако $n=2^h p_0p_1...p_k$, каде $k\geq 0$, $p_0=1$ и $p_1,p_2,...,p_k$ се различни броеви на Ферма. Гаус бил прв кој успеал да конструира таков многуаголник за $n=17$. Јасно е дека постојат бесконечно многу сложени броеви на Ферма.

**Пример 3.** За сите природни броеви $m$ и $n$ такви што $m>n$ важи $f_n\mid f_m-2$.

Доказот следува со $m$-кратна примена на формулата за разлика од кавадрати $x^2-y^2=(x-y)(x+y)$, при што добиваме $f_m-2=f_{m-1}f_{m-2}\cdot\ldots\cdot f_1f_0$ од каде очиглено е дека $f_n\mid f_m-2$.

Да забележиме дека за различни природни броеви $m$ и $n$, броевите $f_m$ и $f_n$ се заемно прости. Тоа е точно бидејќи од претходниот пример имаме дека $(f_m,f_n)=(f_n,2)=1$.

**Пример 4.** Докажи дека за сите природни броеви $n$, $f_n$ е делител на $2^{f_n}-2$.

За сите природни броеви $n$ имаме,

$$2^{f_n}-2=2\left(2^{2^{2^n}}-1\right)=2\left(\left(2^{2^n}\right)^{2^{2^n-n}}-1\right).$$

Јасно, $2^{2^n-n}$ е парен број. Да забележиме дека за секој парен природен број $2k$, изразот $x^{2k}-1$ е делив со $x+1$. Оттука, $x+1$ е делител на $x^{2^{2^n}}-1$. Ако на местото на $x$ ставиме $x=2^{2^n}$ го добиваме тврдењето на задачата.

Во продолжение ќе ја потенцираме важноста на овој пример. Од примерот добивме дека $2^{f_n}\equiv 2(\bmod f_n)$, што всушност е пример дека обратната насока на Теорема на Ферма не важи. Да забечежиме дека за $f_5$ имаме $2^{f_5}\equiv 2(\bmod f_5)$, но $f_5$ не е прост број.

Во продолжение ќе ги броевите на Мерсен кои се во тесна врска со совршените броеви.

**Броеви на Мерсен и совршени броеви**

Броевите $M_n=2^n-1, n\geq 1$ се нарекуваат броеви на Мерсен. Јасно е дека ако $n$ е сложен број, тогаш и $M_n$ е сложен број. Па $M_k$ е прост број само ако $k$ е прост број.

Ако $n=ab$ каде $a$ и $b$ природни броеви поголеми од 1, тогаш и $M_a$ и $M_b$ се делители на $M_n$, што лесно се покажува. Постојат прости броеви $p$, така што $M_p$ е сложен број. На, пример $47\,|\,M_{23}, 167\,|\,M_{83}, 263\,|\,M_{13}$ .

**Теорема 1.** Нека $p$ е непарен прост број и нека $q$ е прост делител на $M_p$. Тогаш $q=2kp+1$ за некој природен број $k$.

За еден број $n\geq 2$ велиме дека е совршен акосумата од неговите делители е еднаква на $2n$. Примери за совршени броеви се $6, 28, 496$. Врската помеѓу броевите на Мерсен и совршените броеви е дадена во наредната теорема. Директната насока е докажана од Евклид, додека обратната насока е покажана од Ојлер.

**Теорема 2.** Еден непарен природен број $n$ е совршен ако и само ако $n=2^{k-1}M_k$ за некој природен број $k$ за кој $M_k$ е прост број.

Наредните теорема се однесува на непарните совршени броеви.

**Теорема 3.** Ако $n$ е непарен совршен број, тогаш факторизацијата на $n$ е во облик $n=p^a q_1^{2b_1} q_2^{2b_2}\cdot\ldots\cdot q_t^{2b_t}$, каде и $a$ и $p$ се конгруентни со 1 модул 4 и $t\geq 2$.

Во $1980$, Hagis докажал дека $t\geq 7$ и $n>10^{50}$. Сепак, постоењето на непарни совршени броеви останува како еден од најпознатите нереени проблеми од теоријата на броеви.

**Задачи за самостојна работа**

1. Декадниот запис на $2005!$ завршува на $m$ нули. Најди го $m$.
2. Нека $s$ и $t$ се природни броеви така да $7^s \mid 400!$ и $3^t \mid ((3!)!)!$. Пресметај го $s+t$.
3. Нека $a$ и $b$ се природни броеви. Докажи дека $a!b!(a+b)! \mid (2a)!(2b)!$.
4. Докажи дека $(k!)^{k^n+k^{n-1}+\ldots+k+1} \mid (k^{n+1})!$, каде $k,n \in \mathbb{N}$.

**Користена литература**

1. T. Andreesu, D. Andrica, Z. Feng, 104 Number Theory problems, Birkhäuser, Boston, 2007.
2. D. Djukic, V. Jankovic, I. Matic, N. Petrovic, The IMO compendium, Springer, New York, 2011.
3. A. Liu, Chinese Mathematics competitions and Olympiads 1981-1993, AMT Publishing, Canberra, 1998.
4. A. Liu, Chinese Mathematics competitions and Olympiads 1993-2001, Book 2, AMT Publishing, Canberra, 2005.
5. A. Negut, Problems for the Mathematical Olympiads, GIL Publishing House, 2005.