Junior Balkan MO 2002

Targu Mures, Romania

$\boxed{1}$ The triangle ABC has $CA = CB$. P is a point on the circumcircle between A and B (and on the opposite side of the line AB to C). D is the foot of the perpendicular from C to PB. Show that $PA + PB = 2 \cdot PD$.

$\boxed{2}$ Two circles with centers O_1 and O_2 meet at two points A and B such that the centers of the circles are on opposite sides of the line AB. The lines BO_1 and BO_2 meet their respective circles again at B_1 and B_2. Let M be the midpoint of B_1B_2. Let M_1, M_2 be points on the circles of centers O_1 and O_2 respectively, such that $\angle AO_1M_1 = \angle AO_2M_2$, and B_1 lies on the minor arc AM_1 while B lies on the minor arc AM_2. Show that $\angle MM_1B = \angle MM_2B$.

Ciprus

$\boxed{3}$ Find all positive integers which have exactly 16 positive divisors $1 = d_1 < d_2 < \ldots < d_{16} = n$ such that the divisor d_k, where $k = d_5$, equals $(d_2 + d_4)d_6$.

$\boxed{4}$ Prove that for all positive real numbers a, b, c the following inequality takes place

$$\frac{1}{b(a+b)} + \frac{1}{c(b+c)} + \frac{1}{a(c+a)} \geq \frac{27}{2(a+b+c)^2}.$$

Laurentiu Panaitopol, Romania

6-та ЈБМО, Тиргу Муреш, Романија, 24. 06. 2002

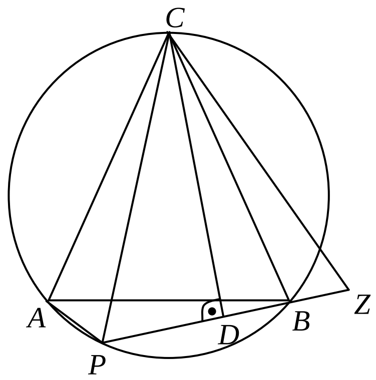
Задача 1. Нека ABC е рамнокрак триаголник така што $\overline{AC}=\overline{BC}$ и P е точка од лакот AB од опишаната кружница, на кој не се наоѓа точката C. Нека D е точка од правата PB така што правата CD е нормална на PB. Докажи дека $\overline{PA}+\overline{PB}=2\overline{PD}$.

Решение. На правата PB избираме точка Z така што $\overline{BZ}=\overline{AP}$ и B е меѓу P и Z. Триаголниците PAC и ZBC се складни, бидејќи

$$\overline{AC}=\overline{BC},\ \angle PAC=180°-\angle PBC=\angle ZBC,\ \overline{AP}=\overline{BZ}.$$

Како последица од нивната складност $\overline{CP}=\overline{CZ}$, односно триаголникот PZC е рамнокрак, па висината CD спуштена од врвот, ја преполовува неговата основа. Конечно,

$$2\overline{PD}=\overline{PZ}=\overline{PB}+\overline{BZ}=\overline{PB}+\overline{PA}.$$



Задача 2. Две кружници k_1 и k_2 со различни радиуси имаат две заеднички точки A и B и нивните центри O_1 и O_2 се наоѓаат на различни страни од правата AB. Нека B_1 и B_2 се точки од k_1 и k_2, соодветно, кои се дијаметрално спротивни точки на точката B. Точките M_1 од k_1 и M_2 од k_2 се избрани така што $\angle AO_1M_1 = \angle AO_2M_2 < 180°$, B_1 е внатрешна точка за $\angle AO_1M_1$ и B е внатрешна точка за $\angle AO_2M_2$. Нека M е средина на отсечката $\overline{B_1B_2}$. Докажи дека $\angle MM_1B = \angle MM_2B$.

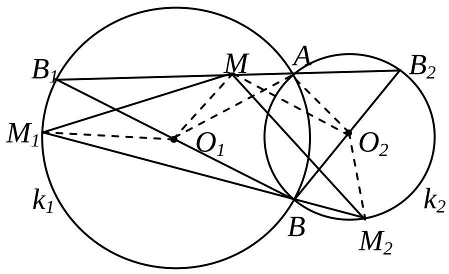
Решение. Точките B_1, A и B_2 се колинеарни ($\angle B_1AB = 90° = \angle BAB_2$). Од M средина на $\overline{B_1B_2}$ и O_1 средина на $\overline{B_1B}$, следува дека $\overline{MO_1}$ е средна линија во триаголникот B_2BB_1, од каде

$$\overline{MO_1} = \tfrac{1}{2}\overline{BB_2} = \overline{AO_2}.$$

На сличен начин, $\overline{MO_2} = \tfrac{1}{2}\overline{BB_1} = \overline{AO_1}$. Од тука следува дека триаголниците MO_1A и AO_2M се складни, од каде следува дека $\angle MO_1A = \angle AO_2M$. Затоа,

$$\angle MO_1M_1 = \angle AO_1M_1 - \angle AO_1M = \angle AO_2M_2 - \angle AO_2M = \angle MO_2M_2,$$

и земајќи ги во предвид равенствата $\overline{MO_1} = \overline{M_2O_2}$ и $\overline{MO_2} = \overline{M_1O_1}$, се добива дека триаголниците MO_1M_1 и M_2O_2M се складни, од каде $\overline{MM_1} = \overline{MM_2}$. Точките M_1, B и M_2 се колинеарни ($\angle M_1BA + \angle ABM_2 = \tfrac{1}{2}\angle AO_1M_1 + \tfrac{1}{2}(360° - \angle AO_2M_2) = 180°$), па следува дека триаголникот M_1M_2M е рамнокрак, од каде $\angle MM_1B = \angle MM_2B$.



Задача 3. Најди ги сите природни броеви N кои ги задоволуваат следните услови:

- N има точно 16 делители $1 = d_1 < d_2 < \cdots < d_{15} < d_{16} = N$;
- делителот со индекс d_5 (тоа е d_{d_5}) е еднаков на $(d_2 + d_4)d_6$.

Решение. Да забележиме најнапред дека N нема повеќе од 4 прости различни делители и дека $d_2 = 2$.

Од условите на задачата следува дека $2 + d_4 \geq d_5 \geq 7$, од каде $d_4 \geq 5$. Бидејќи $d_4 < d_5 \leq 2 + d_4$, следува дека

$$d_5 = 1 + d_4 \tag{1}$$

или

$$d_5 = 2 + d_4 \tag{2}$$

Ако е исполнето равенството (1) , тогаш $d_6 = 2 + d_4$, од каде следува дека $3 \mid N$, односно $d_3 = 3$. Бидејќи $6 \mid N$ мора $d_4 = 6$, од каде $d_5 = 7$ и $d_6 = 8$, од каде следува дека $4 \mid N$ и $d_4 = 4$, што птотивречи на (1). Останува да биде исполнето равенството (2), односно $d_5 = 2 + d_4$. Ги разгледуваме следните случаи:

i) Ако $4 \mid N$, бидејќи $d_4 \geq 5$, добиваме $d_3 = 4$, од каде следува $8 \mid N$. Бидејќи $d_6 \geq 8$, мора $8 \in \{d_4, d_5, d_6\}$. Сите овие случаи водат до контрадикција, имено

- ако $d_4 = 8$, мора $d_5 = 10$, од каде $5 \mid N$ и $d_4 = 4$, што е невозможно,

- ако $d_5 = 8$, имаме $d_4 = 6$, од каде $3 \mid N$ и следствено $d_3 = 3$, што е невозможно,

- ако $d_6 = 8$, тогаш $d_5 = 7$, па е $d_4 = 5$ и $10 \mid N$. Но, $d_7 = (2+5)8 = 56 > 10$, што е невозможно.

Значи 4 не е делител на N, па заклучуваме дека d_3 е прост делител.

ii) Ако $3 \mid N$, тогаш $d_3 = 3$. Бидејќи $6 \mid N$ и $d_4 \geq 6$, мора $d_4 = 6$, од каде $d_5 = 8$, па следува дека $4 \mid N$, што е невозможно.

Значи 3 не е делител на N, па заклучуваме дека $d_3 \geq 5$ и $d_4 \geq 7$.

Бидејќи N и $2 + d_4$ не се деливи со 4, заклучуваме дека d_4 е непарен. Бидејќи $2 + d_4$ и d_4 не се деливи со 3, добиваме дека $d_4 = 3k + 2$, за некој цел број k и бидејќи d_4 е непарен следува дека $d_4 = 6l + 5$, за некој цел број l. Бидејќи $d_5 \leq 16$, мора $7 \leq d_4 \leq 14$. Единствена можност е $d_4 = 11$ и $d_3 = 13$. Бидејќи $2d_3 \mid N$ и $2d_3 \geq d_4$, заклучуваме дека $d_3 \geq 6$. Бидејќи d_3 е прост и $d_3 < 11$, заклучуваме дека $d_3 = 7$. Конечно $N = 2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 = 2002$.

Задача 4. Нека a, b, c се позитивни броеви. Докажи дека

$$\frac{1}{b(a+b)}+\frac{1}{c(b+c)}+\frac{1}{a(c+a)}\geq\frac{27}{2(a+b+c)^2}\,.$$

Решение. Од неравенството меѓу аритметичка и геометриска средина добиваме,

$$\left(\frac{1}{b(a+b)}+\frac{1}{c(b+c)}+\frac{1}{a(c+a)}\right)^3\geq\frac{27}{abc(a+b)(b+c)(c+a)}\,. \qquad (1)$$

Но, $\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3\geq abc$ и $\left(\frac{2(a+b+c)}{3}\right)^3=\left(\frac{(a+b)+(b+c)+(c+a)}{3}\right)^3\geq(a+b)(b+c)(c+a)$, па затоа

$$\frac{1}{abc(a+b)(b+c)(c+a)}\geq\frac{3^3\cdot 3^3}{2^3(a+b+c)^6}\,. \qquad (2)$$

Од (1) и (2) се добива бараното неравенство.