Jens Carstensen & Alija Muminagić,
Данска

АДИЦИОНИ ТЕОРЕМИ

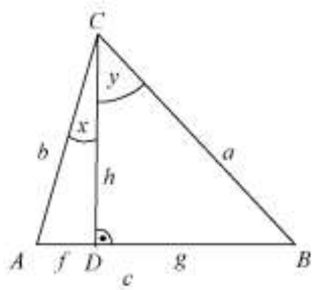
Во оваа статија на повеќе начини, со помош на геометриски фигури, ги изложуваме доказите на адиционите теореми. Во редовната настава обично не наоѓаме време за таквите докази (иако е добро да се знаат). Меѓутоа, овие докази не може да ги земеме како целосни (забележете дека во сите докази станува збор само за остри агли).

Теорема 1. (*адициона теорема за синусната функција*)

$$\sin(x+y)=\sin x\cdot\cos y+\cos x\cdot\sin y \tag{1}$$

Доказ 1. Нека е даден остроаголниот триаголник ΔABC и нека $\overline{AB}=c$, $\overline{BC}=a$, $\overline{CA}=b$, $\overline{AD}=f$, $\overline{DB}=g$, $\overline{CD}=h$ (каде $D\in AB$, $CD\perp AB$), $\sphericalangle ACD=x$, $\sphericalangle BCD=y$ (види црт. 1). Важи, $P_{\Delta ABC}=P_{\Delta ADC}+P_{\Delta BCD}$, т.е.

$$\tfrac{1}{2}a\cdot b\cdot\sin(x+y)=\tfrac{1}{2}b\cdot h\cdot\sin x+\tfrac{1}{2}a\cdot h\cdot\sin y$$



црт. 1

од што следува

$$a\cdot b\cdot\sin(x+y)=b\cdot h\cdot\sin x+a\cdot h\cdot\sin y\,. \tag{2}$$

Во правоаголните триаголници ΔADC и ΔBDC важат релациите

$$h=b\cdot\cos x \tag{3}$$

и

$$h=a\cdot\cos y \tag{4}$$

Со замена на (4) и (3) во (2) се добива

$$a\cdot b\cdot\sin(x+y)=b\cdot a\cdot\cos y\cdot\sin x+a\cdot b\cdot\cos x\cdot\sin y\,,$$

што е еквивалентно (заради $a\cdot b\neq 0$) со

$$\sin(x+y)=\sin x\cdot\cos y+\cos x\cdot\sin y\,.\ \blacklozenge$$

Доказ 2. Го користиме црт. 1. Имаме, $P_{\Delta ABC}=P_{\Delta ADC}+P_{\Delta BCD}$, т.е.

$$\tfrac{1}{2}a\cdot b\cdot\sin(x+y)=\tfrac{1}{2}f\cdot h\cdot\sin 90^\circ+\tfrac{1}{2}g\cdot h\cdot\sin 90^\circ\,,$$

и бидејќи $\sin 90^\circ=1$, последното равенство е еквивалентно со

$$a\cdot b\cdot\sin(x+y)=f\cdot h+g\cdot h\,,$$

што заради $a\cdot b\neq 0$ е еквивалентно со

$$\sin(x+y)=\tfrac{f\cdot h}{a\cdot b}+\tfrac{g\cdot h}{a\cdot b}\,,$$

а од релациите $\frac{h}{b}=\cos x$, $\frac{f}{b}=\sin x$, $\frac{g}{a}=\sin y$, $\frac{h}{a}=\cos y$ (од правоаголните триаголници ΔADC и ΔBDC) тоа е еквивалентно со

$$\sin(x+y)=\sin x\cdot\cos y+\cos x\cdot\sin y\,.\ \blacklozenge$$

Доказ 3. Нека е даден правоаголниот ΔABC ($\sphericalangle C=90^\circ$) и нека $\sphericalangle CAB=x$. Опишуваме кружница околу ΔABC (AB е дијаметар), а потоа на таа кружница ја одредуваме точката D од онаа страна на ипотенузата AB, од која не е точката C така што $\sphericalangle DAB=y$ (види црт. 2). Нека страните на така добиениот четириаголник $ABCD$ се $\overline{AD}=a$, $\overline{DB}=d$, $\overline{BC}=b$, $\overline{CA}=c$ и дијагоналите се $\overline{AB}=2R=e$ и $\overline{DC}=f$, каде R е радиусот на опишаната кружница.

Бидејќи четириаголникот $ABCD$ е тетивен, следува дека

$$\measuredangle CBD=180°-(x+y),$$

а со примена на синусната теорема за триаголникот ΔBCD се добива

$$\frac{f}{\sin\measuredangle CBD}=2R,$$

т.е.

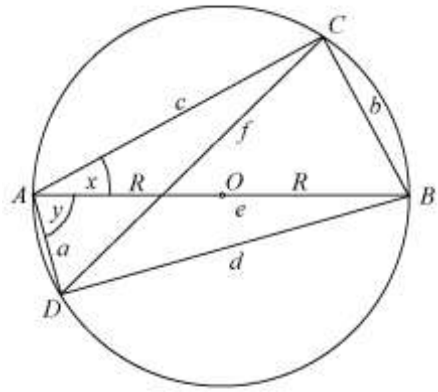
$$\frac{f}{\sin(180°-(x+y))}=2R,$$

односно заради

$$\sin(180°-(x+y))=\sin(x+y)$$

се добива

$$\frac{f}{e}=\sin(x+y) \qquad (5)$$



црт. 2

Од теоремата на Птоломеј за четириаголникот $ABCD$ следува

$$e\cdot f=a\cdot b+c\cdot d,$$

од каде со делење со e^2, се добива

$$\frac{f}{e}=\frac{a\cdot b}{e\cdot e}+\frac{c\cdot d}{e\cdot e}. \qquad (6)$$

Во правоаголните триаголоници ΔABC и ΔABD важат релациите

$$\frac{b}{e}=\sin x,\ \frac{c}{e}=\cos x,\ \frac{d}{e}=\sin y,\ \frac{a}{e}=\cos y, \qquad (7)$$

Конечно од (5), заради (6) и (7) се добива (1). ♦

Доказ 4. Нека $ABCD$ е правоаголник во кој $\overline{AC}=1$ и $\measuredangle CAB=x$. Низ точката A повлекуваме права p, како на црт. 3, и нека $\measuredangle(BA,p)=y$. Нормалните проекции на точките B и C на правата p ги означуваме со E и F соодветно, а проекцијата на точката B на правата CF со G.

Од соодветните правоаголни триаголници, се добива:

$$\Delta AFC:\ \sin(x+y)=\overline{CF} \qquad (8)$$

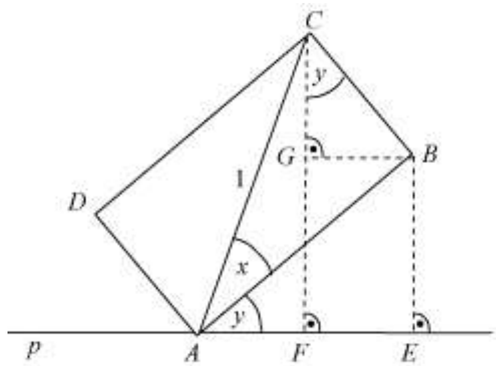
$$\Delta ABC:\ \sin x=\overline{BC} \text{ и } \cos x=\overline{AB} \qquad (9)$$

$$\Delta CGB:\ \measuredangle BCG=y \text{ и } \cos y=\frac{\overline{CG}}{\overline{BC}} \text{ т.е.}$$

$$\overline{CG}=\overline{BC}\cdot\cos y\overset{(9)}{=}\sin x\cdot\cos y \qquad (10)$$

$$\Delta AEB:\ \sin y=\frac{\overline{BE}}{\overline{AB}}, \text{ т.е.}$$

$$\overline{BE}=\overline{AB}\cdot\sin y\overset{(9)}{=}\cos x\cdot\sin y \qquad (11)$$



црт. 3

Конечно, бидејќи $\overline{GF}=\overline{BE}$, имаме

$$\sin(x+y)\overset{(8)}{=}\overline{CF}=\overline{CG}+\overline{GF}\overset{(10),(11)}{=}\sin x\cdot\cos y+\cos x\cdot\sin y. \ ♦$$

Теорема 2. (*адициона теорема за косинусната функција*)

$$\cos(x+y)=\cos x\cdot\cos y-\sin x\cdot\sin y \tag{12}$$

Доказ 1. Го користиме црт. 3. Од соодветните правоаголни триаголници, имаме

$$\Delta AFC:\ \cos(x+y)=\overline{AF} \tag{13}$$

$$\Delta AEB:\ \cos y=\frac{\overline{AE}}{\overline{AB}}\text{, т.е. }\overline{AE}=\overline{AB}\cdot\cos y\overset{(9)}{=}\cos x\cdot\cos y \tag{14}$$

$$\Delta CGB:\ \sin y=\frac{\overline{GB}}{\overline{BC}}\text{, т.е. }\overline{GB}=\overline{BC}\cdot\sin y\overset{(9)}{=}\sin x\cdot\sin y \tag{15}$$

Конечно, бидејќи $\overline{FE}=\overline{GB}$, имаме

$$\cos(x+y)\overset{(13)}{=}\overline{AF}=\overline{AE}-\overline{FE}\overset{(14),(15)}{=}\cos x\cdot\cos y-\sin x\cdot\sin y\,.\ ♦$$

Доказ 2. Го користиме црт. 1. Со примена на косинусната теорема за триаголникот ΔABC, се добива $\cos(x+y)=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$ и заради $c=f+g$ имаме $\cos(x+y)=\frac{a^2+b^2-(f+g)^2}{2ab}$, т.е.

$$\cos(x+y)=\frac{a^2+b^2-f^2-2fg-g^2}{2ab}\,. \tag{16}$$

Од Питагоровата теорема за правоаголните триаголници ΔADC и ΔBDC имаме,

$$b^2=f^2+h^2 \text{ и } a^2=g^2+h^2\,. \tag{17}$$

Со замена на (17) во (16) се добива

$$\cos(x+y)=\frac{g^2+h^2+f^2+h^2-f^2-2fg-g^2}{2ab}=\frac{2h^2-2fg}{2ab}=\frac{h\cdot h}{a\cdot b}-\frac{f\cdot g}{a\cdot b}$$

од каде заради

$$\frac{h}{b}=\cos x\,,\ \frac{h}{a}=\cos y\,,\ \frac{f}{b}=\sin x\,,\ \frac{g}{a}=\sin y\,,$$

конечно се добива

$$\cos(x+y)=\cos x\cdot\cos y-\sin x\cdot\sin y\,.\ ♦$$

Забелешка. За читателите кои ја знаат Ојлеровата формула

$$e^{ix}=\cos x+i\sin x\,,\ x\in\mathbb{C} \tag{18}$$

и формулите

$$\cos z=\tfrac{1}{2}(e^{iz}+e^{-iz})\,,\ \sin z=\tfrac{1}{2i}(e^{iz}-e^{-iz})\,,\ e^{z_1+z_2}=e^{z_1}\cdot e^{z_2}\,, \tag{19}$$

можеме да ги изведеме адиционите теореми за синусната и косинусната функција. Од (18) имаме

$$e^{i(z_1+z_2)}=\cos(z_1+z_2)+i\sin(z_1+z_2)\,. \tag{20}$$

Со користење на (19) и (18) се добива

$$\begin{aligned}e^{i(z_1+z_2)}&=e^{iz_1}\cdot e^{iz_2}=(\cos z_1+i\sin z_1)\cdot(\cos z_2+i\sin z_2)\\&=(\cos z_1\cos z_2-\sin z_1\sin z_2)+i(\sin z_1\cos z_2+\cos z_1\sin z_2)\end{aligned} \tag{21}$$

Ако z_1 и z_2 се реални броеви, со изедначување на реалните и имагинарните делови во (20) и (21) се добиваат адиционите теореми.

Не е тешко да се докаже дека адиционите формули важат и за сите $z_1,z_2\in\mathbb{C}$. ♦

Теорема 3. (*адициона теорема за функцијата тангенс*)

$$tg(x+y)=\frac{tgx+tgy}{1-tgx\cdot tgy} \tag{22}$$

Доказ 1. Нека е даден правоаголниот ΔABC ($\sphericalangle C=90^\circ$) во кој $\overline{BC}=1$, $\sphericalangle DBC=x$, $ED\perp BD$, $\sphericalangle EBD=y$, $EF\perp AC$. Лесно се покажува дека $\sphericalangle EDF=x$ и $\sphericalangle AEF=x+y$ (види црт. 4).

Од соодветните правоаголни триаголници, имаме

$$\Delta ABC:\ tg(x+y)=\overline{CA}=\overline{CD}+\overline{DF}+\overline{FA} \tag{23}$$

$$\Delta BCD:\ tgx=\overline{CD}\ \text{ и }\ \overline{BD}=\frac{1}{\cos x} \tag{24}$$

$$\Delta BDE:\ tgy=\frac{\overline{DE}}{\overline{BD}}\overset{(24)}{=}\frac{\overline{DE}}{\frac{1}{\cos x}}=\overline{DE}\cdot\cos x,\ \text{т.е.}$$

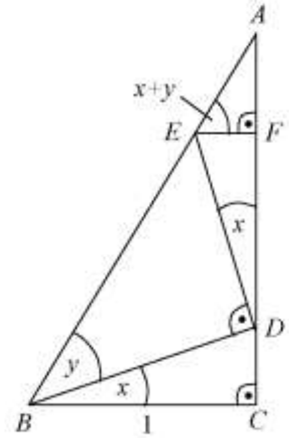
$$\overline{DE}=\frac{tgy}{\cos x} \tag{25}$$

$$\Delta DFE:\ \cos x=\frac{\overline{DF}}{\overline{DE}},\ \text{т.е.}$$

$$\overline{DF}=\overline{DE}\cdot\cos x\overset{(25)}{=}\frac{tgy}{\cos x}\cdot\cos x=tgy \tag{26}$$

$$\Delta DFE:\ \sin x=\frac{\overline{EF}}{\overline{DE}},\ \text{т.е.}$$

$$\overline{EF}=\overline{DE}\cdot\sin x\overset{(25)}{=}\frac{tgy}{\cos x}\cdot\sin x=tgy\cdot tgy \tag{27}$$



црт. 4

$$\Delta EFA:\ tg(x+y)=\frac{\overline{FA}}{\overline{EF}},\ \text{т.е.}$$

$$\overline{FA}=\overline{EF}\cdot tg(x+y)\overset{(27)}{=}tgx\cdot tgy\cdot tg(x+y) \tag{28}$$

Конечно, од (23), заради (24), (26) и (28) се добива

$$tg(x+y)=tgx+tgy+tgx\cdot tgy\cdot tg(x+y)$$

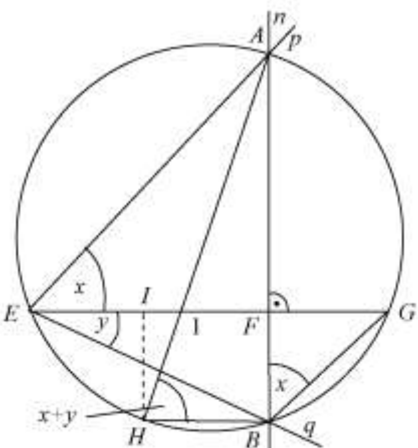
$$\Leftrightarrow\ tg(x+y)(1-tgx\cdot tgy)=tgx+tgy$$

$$\Leftrightarrow\ tg(x+y)=\frac{tgx+tgy}{1-tgx\cdot tgy}.\ \blacklozenge$$

Доказ 2. Нека $\overline{EF}=1$ и нека p и q се полуправи од различна страна на отсечката EF. Нека $\sphericalangle(p,EF)=x$ и $\sphericalangle(q,EF)=y$ (види црт. 5). Во точката F повлекуваме нормала n и пресечните точки на таа нормала со полуправите p и q ги означуваме со A и B соодветно. Тогаш, од правоаголните триаголници ΔEFA и ΔEFB

$$\overline{FA}=tgx\ \text{ и }\ \overline{FB}=tgy. \tag{29}$$

Нека кружницата опишана околу триаголникот ΔAEB го сече продолжението на отсечката EF (преку F) во точ-



црт. 5

ката G. Лесно се покажува дека $\Delta AEF \sim \Delta BGF$ (покажи!) и од таа сличност следува

$$\overline{FE} \cdot \overline{FG} = \overline{FA} \cdot \overline{FB},$$

или од (29) и $\overline{EF} = 1$,

$$\overline{FG} = tgx \cdot tgy\,. \tag{30}$$

Низ точката B повлекуваме тетива BH паралелна со GE. Тогаш, $\sphericalangle AHB = x + y$ (зошто?).

Понатаму, од $\overline{EI} = \overline{FG}$ (докажи!), имаме

$$\begin{aligned}\overline{BH} &= \overline{EG} - \overline{EI} - \overline{FG} \\ &= \overline{EG} - 2 \cdot \overline{FG} \\ &= \overline{EF} + \overline{FG} - 2 \cdot \overline{FG} \\ &= \overline{EF} + \overline{FG} \overset{(30)}{=} 1 - tgx \cdot tgy\end{aligned} \tag{31}$$

Конечно, од правоаголниот триаголник ΔHBA имаме

$$tg(x+y) = \frac{\overline{AB}}{\overline{BH}} = \frac{\overline{BF} + \overline{FA}}{\overline{BH}} \overset{(29),\,(31)}{=} \frac{tgx + tgy}{1 - tgx \cdot tgy}\,. \ \blacklozenge$$