Слободан Филиповски
Словенија

НЕКОЛКУ ИЗБРАНИ ЗАДАЧИ ОД НЕРАВЕНСТВА

Ќе дадеме неколку интересни неравенства, кои главно се задавани или предлагани на олимпијадите по математика.

1 (JMMO 2013). Нека a,b и c се позитивни реални броеви. Докажи дека важи неравенството

$$\frac{1}{2}(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})+\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}+\frac{1}{1+c}\geq 3.$$

Решение. Бидејќи $\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}+\frac{1}{1+c}=3-(\frac{a}{1+a}+\frac{b}{1+b}+\frac{c}{1+c})$ доволно е да докажеме дека важи

$$\frac{1}{2}(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})\geq\frac{a}{1+a}+\frac{b}{1+b}+\frac{c}{1+c}.$$

Јасно $\frac{a}{a+1}\leq\frac{a}{2\sqrt{a}}=\frac{\sqrt{a}}{2}$, $\frac{b}{b+1}\leq\frac{\sqrt{b}}{2}$ и $\frac{c}{c+1}\leq\frac{c}{2}$, од каде се добива бараното неравенство. ■

2. Нека $0\leq a,b,c\leq 1$ и $a+b+c=2$. Докажи го неравенството

$$a^2b+b^2c+c^2a\leq 1.$$

Решение. Точни се неравенствата:

$$(a-1)^2(b-1)\leq 0,\ (b-1)^2(c-1)\leq 0 \text{ и } (c-1)^2(a-1)\leq 0.$$

Според тоа имаме

$$a^2b\leq a^2+2ab-2a-b+1,\ b^2c\leq b^2+2bc-2b-c+1 \text{ и}$$
$$c^2a\leq c^2+2ca-2c-a+1.$$

Со собирање на последните три неравенства добиваме

$$a^2b+b^2c+c^2a\leq a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ac)-3(a+b+c)+3$$
$$=(a+b+c)^2-3(a+b+c)+3=1. \blacksquare$$

3 (Предлог ММО 2013). Нека a,b,c се позитивни реални броеви за кои важи $a+b+c=1$. Докажи дека важи неравенството

$$(\frac{1}{a}+\frac{1}{bc})(\frac{1}{b}+\frac{1}{ca})(\frac{1}{c}+\frac{1}{ab})\geq 1728.$$

Решение. Од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува $\frac{1}{a}+\frac{1}{bc}=\frac{1}{a}+\frac{1}{3bc}+\frac{1}{3bc}+\frac{1}{3bc}\geq 4\frac{1}{\sqrt[4]{27ab^3c^3}}$ и $\frac{1}{27}=(\frac{a+b+c}{3})^3\geq abc$. Од последните две неравенства и аналогните неравенства добоваме:

$$(\frac{1}{a}+\frac{1}{bc})(\frac{1}{b}+\frac{1}{ca})(\frac{1}{c}+\frac{1}{ab})\geq 64\frac{1}{\sqrt[4]{27ab^3c^3}}\frac{1}{\sqrt[4]{27a^3bc^3}}\frac{1}{\sqrt[4]{27a^3b^3c}}=\frac{64}{\sqrt[4]{3^9(abc)^7}}$$

$$\geq \frac{64}{\sqrt[4]{3^9(3^{-3})^7}} = 64\sqrt[4]{3^{12}} = 64 \cdot 27 = 1728. \blacksquare$$

4. (Предлог ЈММО 2013). Нека a, b и c се позитивни реални броеви за кои $ab+bc+ca=6abc$. Докажи дека важи неравенството

$$a+b+c \geq 1+\frac{1}{6}(\frac{a}{c}+\frac{b}{a}+\frac{c}{b}).$$

Решение. Од $ab+bc+ca=6abc$ следува $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=6$. Ако последното равенство последователно го помножиме со a, b, c добиваме

$$1+\frac{a}{b}+\frac{a}{c}=6a,\ 1+\frac{b}{a}+\frac{b}{c}=6b \text{ и } 1+\frac{c}{a}+\frac{c}{b}=6c.$$

Ги собираме горните три равенства и добиваме

$$3+(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a})+(\frac{a}{c}+\frac{b}{a}+\frac{c}{b})=6(a+b+c).$$

Понатаму,

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a} \geq 3\sqrt[3]{\frac{a}{b}\frac{b}{c}\frac{c}{a}}=3,$$

и оттука

$$6(a+b+c) \geq 6+(\frac{a}{c}+\frac{b}{a}+\frac{c}{b}) \text{ т.е. } a+b+c \geq 1+\frac{1}{6}(\frac{a}{c}+\frac{b}{a}+\frac{c}{b}). \blacksquare$$

5 (ММО 2012). Ако a, b, c, d се позитивни реални броеви за кои $abcd=1$, тогаш докажи дека важи неравенството

$$\frac{1}{bc+cd+da-1}+\frac{1}{ab+cd+da-1}+\frac{1}{ab+bc+da-1}+\frac{1}{ab+bc+cd-1} \leq 2.$$

Решение. Од $abcd=1$ следува $bc=\frac{1}{ad}$. Ако искористиме $x+\frac{1}{x} \geq 2$, за $x>0$, добиваме $bc+cd+da-1=\frac{1}{ad}+ad+cd-1 \geq 2+cd-1=1+cd$, т.е.

$$\frac{1}{bc+cd+da-1} \leq \frac{1}{1+cd}. \tag{1}$$

Слично

$$\frac{1}{ab+cd+da-1} \leq \frac{1}{1+ad}, \tag{2}$$

$$\frac{1}{ab+bc+da-1} \leq \frac{1}{1+ab} \quad \text{и} \tag{3}$$

$$\frac{1}{ab+bc+cd-1} \leq \frac{1}{1+bc}. \tag{4}$$

Со собирање на (1), (2), (3) и (4) следува:

$$\begin{aligned}\frac{1}{bc+cd+da-1}+\frac{1}{ab+cd+da-1}+\frac{1}{ab+bc+da-1}+\frac{1}{ab+bc+cd-1} &\leq \frac{1}{1+cd}+\frac{1}{1+ad}+\frac{1}{1+ab}+\frac{1}{1+bc}\\ &=\frac{1}{1+\frac{1}{ab}}+\frac{1}{1+ab}+\frac{1}{1+\frac{1}{bc}}+\frac{1}{1+bc}\\ &=\frac{ab}{1+ab}+\frac{1}{1+ab}+\frac{bc}{1+bc}+\frac{1}{1+bc}=2. \blacksquare\end{aligned}$$

6 (JMMO 2012). Нека a,b и c се позитивни реални броеви за кои важи $a+b+c+2=abc$. Докажи дека $\frac{a}{b+1}+\frac{b}{c+1}+\frac{c}{a+1}\geq 2$.

Решение. Прво воочуваме дека важи следното равенство:

$$\begin{aligned}(a+1)(b+1)+(a+1)(c+1)+(b+1)(c+1)&=a+b+c+(a+b+c+2)+ab+ac+bc+1\\&=a+b+c+abc+ab+ac+bc+1\\&=(a+1)(b+1)(c+1).\end{aligned}$$

Сега од неравенството меѓу аритметичка и геометриска средина добиваме:

$$\begin{aligned}\frac{a}{b+1}+\frac{b}{c+1}+\frac{c}{a+1}&=\frac{a+1}{b+1}+\frac{b+1}{c+1}+\frac{c+1}{a+1}-\left(\frac{1}{b+1}+\frac{1}{c+1}+\frac{1}{a+1}\right)\geq 3\sqrt[3]{\frac{a+1}{b+1}\cdot\frac{b+1}{c+1}\cdot\frac{c+1}{a+1}}-\left(\frac{1}{b+1}+\frac{1}{c+1}+\frac{1}{a+1}\right)\\&=3-\frac{(a+1)(b+1)(c+1)}{(a+1)(b+1)(c+1)}=3-1=2.\end{aligned}$$

Знак за равенството важи ако и само ако $a=b=c=2$.

7. Предлог (ММО 2011). Нека a,b и c се позитивни реални броеви за кои важи $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=1$. Докажи дека важи неравенството $\frac{a^5+b^5+c^5}{a^3+b^3+c^3}\geq 3$.

Решение. Од неравенство на Коши-Буњаковски-Шварц добиваме

$a^{\frac{5}{2}}a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{5}{2}}b^{\frac{1}{2}}+c^{\frac{5}{2}}c^{\frac{1}{2}}\leq\sqrt{a^5+b^5+c^5}\sqrt{a+b+c}$, т.е. $\frac{a^5+b^5+c^5}{a^3+b^3+c^3}\geq\frac{a^3+b^3+c^3}{a+b+c}$.

Сега, од неравенство на Чебишев имаме $\frac{a+b+c}{3}\cdot\frac{a^2+b^2+c^2}{3}\leq\frac{a^3+b^3+c^3}{3}$, и оттука следува

$$\frac{a^5+b^5+c^5}{a^3+b^3+c^3}\geq\frac{a^3+b^3+c^3}{a+b+c}\geq\frac{a^2+b^2+c^2}{3}\geq\frac{3}{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}=3.\ \blacksquare$$

8 (ММО 2013). Нека x,y и z се позитивни реални броеви такви што $x^4+y^4+z^4=3$. Докажи дека

$$\frac{9}{x^2+y^4+z^6}+\frac{9}{x^4+y^6+z^2}+\frac{9}{x^6+y^2+z^4}\leq x^6+y^6+z^6+6.$$

Решение. Ако го искористиме неравенството на Коши – Буњаковски – Шварц за позитивните броеви x,y^2,z^3 и x^3,y^2,z добиваме

$$(x^4+y^4+z^4)^2\leq(x^2+y^4+z^6)(x^6+y^4+z^2),\ \text{т.е.}$$

$$\frac{1}{x^2+y^4+z^6}\leq\frac{x^6+y^4+z^2}{9}. \qquad (1)$$

Аналогно, со користење на неравенство на Коши – Буњаковски – Шварц за позитивните броеви x^2,y^3,z и x^2,y,z^3, како и за позитивните броеви x^3,y,z^2 и x,y^3,z^2, соодветно добиваме

$$\frac{1}{x^4+y^6+z^2} \le \frac{x^4+y^2+z^6}{9} \tag{2}$$

$$\frac{1}{x^6+y^2+z^4} \le \frac{x^2+y^6+z^4}{9}. \tag{3}$$

Сега, со собирање на неравенствата (1), (2) и (3) го добиваме неравенството

$$\frac{1}{x^2+y^4+z^6}+\frac{1}{x^4+y^6+z^2}+\frac{1}{x^6+y^2+z^4} \le \frac{x^6+y^6+z^6+x^4+y^4+z^4+x^2+y^2+z^2}{9} \tag{4}$$

Од неравенство меѓу аритметичка и квадратна средина за позитивните броеви x^2, y^2 и z^2 и од условот на задачата добиваме дека

$$x^2+y^2+z^2 \le 3\sqrt{\frac{x^4+y^4+z^4}{3}} = 3$$

па ако замениме во (4) го добиваме бараното неравенство. ■

9 (Предлог БМО 2013). Нека a,b,c и d се позитивни реални броеви така што $abcd=\frac{1}{4}$. Докажи дека важи

$$(16ac+\frac{a}{c^2b}+\frac{16c}{a^2d}+\frac{4}{ac})(bd+\frac{b}{256d^2c}+\frac{d}{b^2a}+\frac{1}{64bd}) \ge \frac{81}{4}.$$

Решение. Прво забележуваме дека

$$(a+\frac{1}{a^2d})(16c+\frac{1}{c^2b}) = 16ac+\frac{a}{c^2b}+\frac{16c}{a^2d}+\frac{4}{ac} \quad \text{и}$$

$$(b+\frac{1}{b^2a})(d+\frac{1}{256d^2c}) = bd+\frac{b}{256d^2c}+\frac{d}{b^2a}+\frac{1}{64bd}.$$

Оттука доволно е да докажеме дека

$$(a+\frac{1}{a^2d})(16c+\frac{1}{c^2b})(b+\frac{1}{b^2a})(d+\frac{1}{256d^2c}) \ge \frac{81}{4}. \tag{1}$$

Од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина за позитивните броеви $\frac{a}{2},\frac{a}{2},\frac{1}{a^2d}$ добиваме $a+\frac{1}{a^2d} \ge 3\sqrt[3]{\frac{1}{4d}}$. На ист начин важи $b+\frac{1}{b^2a} \ge 3\sqrt[3]{\frac{1}{4a}}$. Од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина за позитивните броеви $8c, 8c, \frac{1}{c^2b}$ добиваме $16c+\frac{1}{c^2b} \ge 12\sqrt[3]{\frac{1}{b}}$. Аналогно $d+\frac{1}{256d^2c} \ge \frac{3}{8}\sqrt[3]{\frac{1}{2c}}$. Конечно, ако ги помножиме последните четири неравенства и искористиме дека $abcd=\frac{1}{4}$ го добиваме неравенството (1).

Знак за равенство важи кога $a=2, b=1, c=\frac{1}{2}$ и $d=\frac{1}{4}$. ■