Ристо Малчески,
ФОН универзитет, Скопје

ФИБОНАЧИЕВИ БРОЕВИ

Во оваа статија ќе ги разгледаме Фибоначиевите броеви и нивната врска со полиномите со целобројни коефициенти. За таа цел прво ќе се осврнеме на линеарните диференцни равенки од втор ред.

1. ЛИНЕАРНА ДИФЕРЕНЦНА РАВЕНКА ОД ВТОР РЕД

Дефиниција 1. Нека $P,Q,R:\mathbf{N}\to\mathbf{R}$ и нека $x_0,x_1\in\mathbf{R}$. Равенката од видот

$$x_{n+2}+P(n)x_{n+1}+Q(n)x_n=R(n)\,, \qquad (1)$$

ја нарекуваме *линеарна диференцна равенка од втор ред со почетни услови* x_0 и x_1. Ако, $R(n)=0$, за секој $n\in\mathbf{N}$, тогаш диференцната равенка ја нарекуваме *хомогена*, а во спротивно ја нарекуваме *нехомогена*. За низата $\{a_n\}$ ќе велиме дека е *решение* на равенката (1) ако

$$a_{n+2}+P(n)a_{n+1}+Q(n)a_n=R(n)\,.$$

Лема 1. Нека е дадена линеарната хомогена диференцна равенка од втор ред

$$x_{n+2}+P(n)x_{n+1}+Q(n)x_n=0\,, \qquad (2)$$

и нека $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ се две нејзини решенија. Тогаш, за секои $A,B\in\mathbf{C}$ низата $\{A\cdot a_n+B\cdot b_n\}$ е решение на (2).

Доказ. Нека $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ се две решенија на равенката (11) и $A,B\in\mathbf{C}$. Имаме,

$$\begin{aligned}&(Aa_{n+2}+Bb_{n+2})+P(n)(Aa_{n+1}+Bb_{n+1})\\ &\quad+Q(n)(Aa_n+Bb_n)=\\ &=A[a_{n+2}+P(n)a_{n+1}+Q(n)a_n]\\ &\quad+B[b_{n+2}+P(n)b_{n+1}+Q(n)b_n]\\ &=A\cdot 0+B\cdot 0=0\end{aligned}$$

што значи дека $\{A\cdot a_n+B\cdot b_n\}$ е решение на (2). ♦

Дефиниција 2. За решенијата $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ на линеарната хомогена диференцна равенка (2) ќе велиме дека се *пропорционални* ако постои $A\in\mathbf{C}$ таков што $a_n=Ab_n$, за секој $n\geq 0$. Во спротивен случај ќе велиме дека решенијата $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ се *непропорционални*.

Лема 2. а) Решенијата $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ на хомогената равенка (2) се пропорционални ако и само ако $a_0:b_0=a_1:b_1$.

б) Решенијата $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ на хомогената равенка (2) се непропорционални ако и само ако $a_0:b_0\neq a_1:b_1$.

Доказ. а) Ако решенијата $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ се пропорционални, тогаш $a_0=Ab_0$ и $a_1=Ab_1$, па затоа $a_0:b_0=A=a_1:b_1$.

Обратно, нека $a_0:b_0=a_1:b_1=A$. Тогаш, $a_0=Ab_0$ и $a_1=Ab_1$. Нека претпоставиме дека за $a_n=Ab_n$ и $a_{n+1}=Ab_{n+1}$. Тогаш, од (11) следува

$$\begin{aligned}a_{n+2}&=-P(n)a_{n+1}-Q(n)a_n\\ &=-P(n)Ab_{n+1}-Q(n)Ab_n\\ &=A[-P(n)b_{n+1}-Q(n)b_n]=Ab_{n+2}.\end{aligned}$$

Сега, од принципот на математичка индукција следува дека $a_k=Ab_k$, за секој $k\geq 0$, т.е. решенијата $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ се пропорционални.

б) Непосредно следува од а). ♦

Теорема 1. Ако $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ се две непропорционални решенија на хомогената равенка (2), тогаш за секое решение $\{x_n\}$ на (2) постојат единствени $A,B\in\mathbf{C}$ такви што $x_k=Aa_k+Bb_k$, за секој $k\geq 0$.

Доказ. Секое решение $\{x_n\}$ на (2) еднозначно е определено со своите први два члена x_0 и x_1. Нека, $x_0=a$ и $x_1=b$. Јасно, ако константите A и B ги определиме така што

$$\begin{cases}Aa_0+Bb_0=a\\ Aa_1+Bb_1=b\end{cases}, \qquad (3)$$

тогаш за секој $k\geq 0$ ќе важи $x_k=Aa_k+Bb_k$. Бидејќи решенијата $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ се непропорционални, од лема 2.4. б) следува дека $a_0:b_0\neq a_1:b_1$, што значи дека системот (3) има единствено решение, т.е. постојат единствени $A,B\in\mathbf{C}$ такви што

$x_k = Aa_k + Bb_k$, за секој $k \geq 0$. ♦

Пред да преминеме на разгледување на постапката за решавање на линеарна хомогена диференцна равенка од втор ред со константни коефициенти, без да ја докажуваме, ќе ја формулираме теоремата за решенијата на нехомогената линеарна диференцна равенка од втор ред.

Теорема 2. Нека е дадена нехомогената диференцна равенка од втор ред (1). Ако $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ се две непропорционални решенија на соодветната хомогена равенка (2), а $\{x_n\}$ е решение на нехомогената равенка (1), тогаш за секое решение $\{y_n\}$ на (1) постојат $A, B \in \mathbf{C}$ такви што $y_k = Aa_k + Bb_k + x_k$, за секој $k \geq 0$. ♦

2. ХОМОГЕНА ЛИНЕАРНА ДИФЕРЕНЦНА РАВЕНКА ОД ВТОР РЕД СО КОНСТАНТНИ КОЕФИЦИЕНТИ

Дефиниција 3. Диференцната равенка

$$x_{n+2} + bx_{n+1} + cx_n = 0,\ b, c \in \mathbf{R}, \qquad (4)$$

ја нарекуваме *хомогена диференцна равенка со константни коефициенти од втор ред.*

На равенката (4) и ја придружуваме квадратната равенка

$$r^2 + br + c = 0 \qquad (5)$$

која ја нарекуваме *карактеристична равенка* за равенката (4).

Лема 3. Нека α и β се различни решенија на карактеристичната равенка (5) за равенката (4). Тогаш, низите $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ определени со $a_n = \alpha^n$ и $b_n = \beta^n$, $n = 0,1,2,...$ се непропорционални решенија на равенката (4).

Доказ. Бидејќи α е решение на карактеристичната равенка (5) за равенката (4), имаме $\alpha^2 + b\alpha + c = 0$, па затоа

$$\begin{aligned} a_{n+2} + ba_{n+1} + ca_n &= \alpha^{n+2} + b\alpha^{n+1} + c\alpha^n \\ &= \alpha^n(\alpha^2 + b\alpha + c) = \alpha^n \cdot 0 = 0, \end{aligned}$$

што значи дека низата $\{a_n\}$ определена со $a_n = \alpha^n$, $n = 0,1,2,...$ е решение на равенката (4).

Аналогно се докажува дека и низата $\{b_n\}$ е решение на (4).

Бидејќи $a_0 : b_0 = 1:1 \neq \alpha : \beta = a_1 : b_1$, од лема 2 б) следува дека низите $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ се непропорционални решенија на равенката (4). ♦

Лема 4. Нека α е двоен корен на карактеристичната равенка (5) за равенката (4). Тогаш, низите $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ определени со $a_n = \alpha^n$ и $b_n = n\alpha^n$, $n = 0,1,2,...$ се непропорционални решенија на равенката (4).

Доказ. Доказот за низата $\{a_n\}$ е аналоген на доказот од лема 3. Бидејќи α е двоен корен, од Виетовите правила следува дека $2\alpha = -b$. Според тоа,

$$\begin{aligned} b_{n+2} + bb_{n+1} + cb_n &= (n+2)\alpha^{n+2} + b(n+1)\alpha^{n+1} + cn\alpha^n \\ &= n\alpha^n(\alpha^2 + b\alpha + c) + \alpha^{n+1}(2\alpha + b) \\ &= n\alpha^n \cdot 0 + \alpha^{n+1} \cdot 0 = 0, \end{aligned}$$

т.е. низата определена со $b_n = n\alpha^n$, $n = 0,1,2,...$ е решение на равенката (4).

Бидејќи $b_0 : a_0 = 0:1 \neq \alpha : \alpha = b_1 : a_1$, од лема 2 б) следува дека низите $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ се непропорционални решенија на равенката (4). ♦

Забелешка 1. За равенката (4) на единствен начин ја формираме нејзината карактеристична равенка (5), со чија помош наоѓаме две непропорционални решенија на (4). Сега од теорема 1 следува дека, ако $\{x_n\}$ е решение на (4), тогаш постојат единствени $A, B \in \mathbf{C}$ такви што

$$x_k = Aa_k + Bb_k, \text{ за секој } k \geq 0,$$

каде низите $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ се дадени со лемите 3 и 4.

Пример 1. Решете ги диференцните равенки

а) $x_{n+2} - 3x_{n+1} + 2x_n = 0$, со почетни услови $x_0 = 0$ и $x_1 = 1$.

б) $x_{n+2}-4x_{n+1}+4x_n=0$, со почетни услови $x_0=1$ и $x_1=4$.

в) $x_{n+2}-2x_{n+1}+2x_n=0$, со почетни услови $x_0=1$ и $x_1=4$.

Решение. **а)** Корените на карактеристичната равенка

$$r^2-3r+2=0$$

се 2 и 1 и тие се различни. Низите $\{2^n\}$ и $\{1\}$ се непропорционални решенија, па затоа општото решение на дадената равенка е $x_n=A\cdot 2^n+B$, $n=0,1,2,...$. Константите A и B ги определуваме од почетните услови и го добиваме системот

$$\begin{cases} A\cdot 2^0+B=0 \\ A\cdot 2^1+B=1 \end{cases}$$

чие решение е $A=1$ и $B=-1$. Според тоа, решението на дадената равенка е

$$x_n=2^n-1,\ n=0,1,2,....$$

б) Карактеристичната равенка е

$$r^2-4r+4=0$$

и таа има двоен корен 2. Низите $\{2^n\}$ и $\{n2^n\}$ се непропорционални решенија, па затоа општото решение на дадената равенка е

$$x_n=A\cdot 2^n+B\cdot n2^n,\ n=0,1,2,....$$

Константите A и B ги определуваме од почетните услови и го добиваме системот

$$\begin{cases} A\cdot 2^0+B\cdot 0\cdot 2^0=1 \\ A\cdot 2^1+B\cdot 1\cdot 2^1=4 \end{cases}$$

чие решение е $A=1$ и $B=1$. Според тоа, решението на дадената равенка е

$$x_n=2^n+n2^n=2^n(n+1),\ n=0,1,2,....$$

в) Карактеристичната равенка е

$$r^2-2r+2=0$$

и таа има коњугирано комплексни корени $1-i$ и $1+i$. Низите $\{(1-i)^n\}$ и $\{(1+i)^n\}$ се непропорционални решенија, па затоа општото решение на дадената равенка е

$$x_n=A(1-i)^n+B(1+i)^n,\ n=0,1,2,....$$

Константите A и B ги определуваме од почетните услови и го добиваме системот

$$\begin{cases} A(1-i)^0+B(1+i)^0=1 \\ A(1-i)^1+B(1+i)^1=4 \end{cases}$$

чие решение е

$$A=\tfrac{1+3i}{2} \text{ и } B=\tfrac{1-3i}{2}.$$

Според тоа, решението на дадената равенка е

$$x_n=\tfrac{1+3i}{2}(1-i)^n-\tfrac{1-3i}{2}(1+i)^n,\ n=0,1,2,.... \ \blacklozenge$$

3. ФИБОНАЧИЕВИ БРОЕВИ

На почетокот од нашите разгледувања ги споменавме Фибоначиевите броеви, т.е. броевите кои се задаваат со рекурентната релација:

$$f_0=0,\ f_1=1 \text{ и } f_{n+2}=f_{n+1}+f_n.$$

Ако ја искористиме дадената рекурзија, за низата Фибоначиеви броеви добиваме

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, ...

Природно е да се обидеме да најдеме формула за определување на општиот член на низата Фибоначиеви броеви. За таа цел ќе ја решиме следната задача.

Задача 1. Реши ја диференцната равенка

$$f_{n+2}=f_{n+1}+f_n, \qquad (6)$$

со почетни услови $f_0=0,\ f_1=1$.

Решение. Равенката (6) е линеарна диференцна равенка од втор ред со константни коефициенти. Нејзината карактеристична равенка е $r^2-r-1=0$, со решенија

$$a=\tfrac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ и } b=\tfrac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Според тоа, општото решение на равенката (6) е дадено со

$$f_n=A(\tfrac{1+\sqrt{5}}{2})^n+B(\tfrac{1-\sqrt{5}}{2})^n.$$

Од почетните услови $f_0=0,\ f_1=1$ го добиваме системот равенки

$$A\tfrac{1+\sqrt{5}}{2}+B\tfrac{1-\sqrt{5}}{2}=1 \text{ и } A+B=0$$

чие решение е $A=\frac{1}{\sqrt{5}}, B=-\frac{1}{\sqrt{5}}$. Според тоа, решението на (6) е дадено со

$$f_n=\tfrac{1}{\sqrt{5}}[(\tfrac{1+\sqrt{5}}{2})^n-(\tfrac{1-\sqrt{5}}{2})^n],\ n\ge 0. \ \blacklozenge$$

Во натамошните разгледување ќе докажеме некои својства на Фибоначиевите броеви.

Задача 2. Докажи дека за фибоначиевите броеви важи:

а) $f_{n+m}=f_{n-1}f_m+f_nf_{m+1}$, $n\ge 2$

б) $f_{2n+1} = f_n^2 + f_{n+1}^2$,

в) $f_{2n} = f_{n+1}^2 - f_{n-1}^2$, $n \geq 2$

г) $f_{3n} = f_{n+1}^3 + f_n^3 - f_{n-1}^3$, $n \geq 2$

д) $f_{n-m} f_{n+m} - f_n^2 = (-1)^{n+m-1} f_m^2$, $n > m$

ѓ) $f_n^4 - f_{n-2} f_{n-1} f_{n+1} f_{n+2} = 1$.

Решение. а) За $n = 2$ и $n = 3$ формулата е точна бидејќи

$$f_{m+2} = f_{m+1} + f_m = f_{m+1} f_1 + f_m f_2 \text{ и}$$

$$\begin{aligned} f_{m+3} &= f_{m+2} + f_{m+1} = (f_{m+1} + f_m) + f_{m+1} \\ &= f_2 f_m + 2 f_{m+1} = f_2 f_m + f_3 f_{m+1}. \end{aligned}$$

Нека претпоставиме дека формулата е точна за $n = k$ и $n = k+1$, т.е.

$$f_{k+m} = f_{k-1} f_m + f_k f_{m+1} \text{ и}$$

$$f_{k+1+m} = f_k f_m + f_{k+1} f_{m+1}.$$

Ако ги собереме последните две равенства добиваме

$$f_{k+m} + f_{k+1+m} = (f_k + f_{k-1}) f_m + (f_k + f_{k+1}) f_{m+1},$$

т.е.

$$f_{k+2+m} = f_{k+1} f_m + f_{k+2} f_{m+1}.$$

Според тоа, формулата е точна за $n = k+2$, па затоа тврдењето следува од принципот на математичка индукција.

б) Во задачата под а) наместо n ставете $n+1$, а наместо m ставете n.

в) Ако во формулата од задачата под а) наместо m ставиме n добиваме

$$f_{2n} = f_{n-1} f_n + f_n f_{n+1} = f_n (f_{n-1} + f_{n+1})$$

и како $f_n = f_{n+1} - f_{n-1}$ со замена во последното равенство го добиваме бараното равенство.

г) Ако во формулата од задачата под а) наместо n ставиме $2n$, а наместо m ставиме n добиваме $f_{3n} = f_{2n-1} f_n + f_{2n} f_{n+1}$. Со помош на формулите од задачите под б) и в) последното равенство може да се трансформира на следниот начин:

$$\begin{aligned} f_{3n} &= f_{2n-1} f_n + f_{2n} f_{n+1} \\ &= (f_n^2 + f_{n-1}^2) f_n + (f_{n+1}^2 - f_{n-1}^2) f_{n+1} \\ &= f_{n+1}^3 + f_n^3 - f_{n-1}^2 (f_{n+1} - f_n) \\ &= f_{n+1}^3 + f_n^3 - f_{n-1}^3. \end{aligned}$$

д) Точноста на формулата за $n = m+1$ следува од формулата под б). Нека претпоставиме дека за $n = k$ важи

$$f_{k-m} f_{k+m} - f_k^2 = (-1)^{k+m-1} f_m^2.$$

Од б) следува

$$f_{2k+1} = f_k^2 + f_{k+1}^2,$$

а од а) следува

$$f_{2k+1} = f_{k-m} f_{k+m} + f_{k+1-m} f_{k+1+m}.$$

Од последните две равенства и од индуктивната претпоставка добиваме

$$\begin{aligned} f_{k+1-m} f_{k+1+m} - f_{k+1}^2 &= -(f_{k-m} f_{k+m} - f_k^2) \\ &= -(-1)^{k+m-1} f_m^2 = (-1)^{k+m} f_m^2, \end{aligned}$$

т.е. равенството важи за $n = k+1$, па од принципот на математичка индукција следува дека важи за секој природен број $n \geq m+1$.

ѓ) Ако во формулата од задачата под д) ставиме $m = 1$ и $m = 2$ добиваме

$$f_{n-1} f_{n+1} - f_n^2 = (-1)^n f_1^2 \text{ и}$$

$$f_{n-2} f_{n+2} - f_n^2 = (-1)^{n+1} f_2^2,$$

што значи дека

$$f_{n-1} f_{n+1} = f_n^2 + (-1)^n \text{ и}$$

$$f_{n-2} f_{n+2} = f_n^2 - (-1)^n.$$

Ако ги помножиме последните две равенства го добиваме равенството

$$f_{n-2} f_{n-1} f_{n+1} f_{n+2} = f_n^4 - 1,$$

кое е еквивалентно на бараното равенство. ♦

Задача 3. Докажи дека за Фибоначиевите броеви важи:

а) $\sum_{i=1}^{n} f_i = f_{n+2} - 1$,

б) $\sum_{i=1}^{n} (n-i+1) f_i = f_{n+4} - (n+3)$

в) $\sum_{i=1}^{n} i f_i = n f_{n+2} - f_{n+3} + 2$,

г) $\sum_{i=1}^{n} f_{2i-1} = f_{2n}$

д) $\sum_{i=1}^{n} f_{2i} = f_{2n+1} - 1$,

ѓ) $\sum_{i=1}^{n} (-1)^i f_i = (-1)^n f_{n-1} - 1$.

Решение. а) Од $f_k = f_{k+2} - f_{k+1}$ следува

$$\sum_{i=1}^{n} f_i = \sum_{i=1}^{n} (f_{i+2} - f_{i+1}) = f_{n+2} - f_2 = f_{n+2} - 1.$$

б) Од задачата под а) имаме

$$\sum_{i=1}^{n}(n-i+1)f_i =$$

$$= f_1 + (f_1+f_2) + (f_1+f_2+f_3)$$
$$+ \dots + (f_1+f_2+\dots+f_n)$$
$$= (f_3-1)+(f_4-1)+(f_5-1)+\dots+(f_{n+2}-1)$$
$$= \sum_{i=1}^{n+2} f_i - n - f_1 - f_2$$
$$= f_{n+4}-(n+3).$$

в) Од задачите под а) и б) следува

$$\sum_{i=1}^{n} if_i = (n+1)\sum_{i=1}^{n} f_i - \sum_{i=1}^{n}(n+1-i)f_i$$
$$= (n+1)(f_{n+2}-1) - (f_{n+4}-(n+3))$$
$$= nf_{n+2} - (f_{n+4}-f_{n+2}) + 2$$
$$= nf_{n+2} - f_{n+3} + 2.$$

г) Имаме $f_{2k-1} = f_{2k} - f_{2k-2}$ па затоа:

$$\sum_{i=1}^{n} f_{2i-1} = \sum_{i=1}^{n}(f_{2i}-f_{2i-2}) = f_{2n} - f_0 = f_{2n}\,.$$

д) Имајќи ги предвид равенствата под а) и г) добиваме

$$\sum_{i=1}^{n} f_{2i} = \sum_{i=1}^{2n} f_i - \sum_{i=1}^{n} f_{2i-1} = f_{2n+2} - 1 - f_{2n} = f_{2n+1} - 1$$

ѓ) Од

$$(-1)^k f_k = (-1)^k f_{k-1} + (-1)^k f_{k-2}$$
$$= (-1)^k f_{k-1} - (-1)^{k-1} f_{k-2}$$

следува

$$\sum_{i=1}^{n}(-1)^i f_i = (-1)^1 f_1 + \sum_{i=2}^{n}[(-1)^i f_{i-1} - (-1)^{i-1} f_{i-2}]$$
$$= -f_1 + (-1)^n f_{n-1} - (-1)^1 f_0$$
$$= (-1)^n f_{n-1} - 1,$$

што и требаше да се докаже. ♦

Задача 4. Докажи дека бројот f_n е најблизок природен број на бројот $\frac{a^n}{\sqrt{5}}$, каде $a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Решение. Според задача 1 имаме $f_n = \frac{a^n - b^n}{\sqrt{5}}$, каде $a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ и $b = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Сега тврдењето на задачата следува од неравенството

$$\left| f_n - \frac{a^n}{\sqrt{5}} \right| = \left| \frac{a^n - b^n}{\sqrt{5}} - \frac{a^n}{\sqrt{5}} \right| = \frac{|b|^n}{\sqrt{5}} < \frac{1}{\sqrt{5}} < \frac{1}{2}\,. \ ♦$$

ЗАДАЧИ ЗА САМОСТОЈНА РАБОТА

1. Реши ги диференцните равенки:

а) $x_{n+2} - 2x_{n+1} - 3x_n = 0$, при почетни услови $x_0 = 3$ и $x_1 = 1$,

б) $x_{n+2} - 10x_{n+1} + 25x_n = 0$, при почетни услови $x_0 = 2$ и $x_1 = -5$,

в) $x_{n+2} - x_{n+1} + x_n = 0$, при почетни услови $x_0 = 2$ и $x_1 = 1$,

г) $x_{n+2} - 2x_{n+1} + 4x_n = 0$, при почетни услови $x_0 = 1$ и $x_1 = 1$,

д) $x_{n+2} - 4x_{n+1} + 3x_n = 0$, при почетни услови $x_0 = 10$ и $x_1 = 16$.

2. Докажи дека за Фибоначиевите броеви се исполнети равенствата:

а) $\sum_{i=1}^{n} f_{3i} = \frac{f_{3n+2}-1}{2}$,

б) $\sum_{i=1}^{n} f_i^2 = f_n f_{n+1}$,

в) $\sum_{i=1}^{2n-1} f_i f_{i+1} = f_{2n}^2$,

г) $\sum_{i=1}^{2n} f_i f_{i+1} = f_{2n+1}^2 - 1$,

д) $\sum_{i=1}^{n} f_i^3 = \frac{f_{3n+2} - (-1)^n 6 f_{n-1} + 5}{10}$,

ѓ) $\sum_{i=2}^{n+1} \frac{f_i}{f_{i-1} f_{i+1}} = 2 - \frac{f_{n+3}}{f_{n+1} f_{n+2}}$.

3. Докажи дека за секои $k, n \in \mathbf{N}$ дропката $\frac{kf_{n+2} + f_n}{kf_{n+3} + f_{n+1}}$ е нескратлива.

4. Природните броеви x_1, x_2 се помали од 10000. Поаѓајќи од нив е конструирана низа $x_1, x_2, \dots, x_n$, така што бројот x_3 е еднаков на $|x_1 - x_2|$, бројот x_4 е еднаков на најмалиот меѓу броевите $|x_1 - x_2|$, $|x_1 - x_3|$ и $|x_3 - x_2|$, бројот x_5 е еднаков на најмалиот меѓу броевите $|x_1 - x_2|$, $|x_1 - x_3|$, $|x_1 - x_4|$, $|x_2 - x_3|$, $|x_2 - x_4|$ и $|x_3 - x_4|$ итн. Докажи дека $x_{21} = 0$.