Локална ММО

1. Најди ги сите функции $f:\mathbb{Q}\to\mathbb{Q}$ кои ги задоволуваат условите:

   (i) $f(1)=2$

   (ii) $f(xy)=f(x)f(y)-f(x+y)+1$ за секои $x,y\in\mathbb{Q}$.

   Решение. За $y=1$ од (ii) добиваме $f(x)=2f(x)-f(x+1)+1$, односно $f(x+1)=f(x)+1$, за секој $x\in\mathbb{Q}$. Од овде се добива $f(x+n)=f(x)+n$, за секој $n\in\mathbb{Z}$, и посебно од (i) следува $f(n)=n+1$.

   Секој $x\in\mathbb{Q}$ може да се запише во облик $x=\frac{m}{n}$, каде m и n се цели броеви ($n\neq 0$). Според тоа

$$f(nx)=f(x)f(n)-f(n+x)+1,$$

$$m+1=f(m)=f(x)f(n+1)-f(x)-n+1,$$

   од каде што

$$f(x)=\frac{m}{n}+1=x+1,\text{ за секој } x\in\mathbb{Q}.$$

2. Нека A,B и C се три колинеарни точки, такви што B е меѓу A и C. Од иста страна на правата AC конструирани се три полукружници со дијаметри AB, BC и AC. Заедничката тангента на првите две полукружници во точката B ја сечат третата полукружница во точка E. Нека U и V се точки во кои заедничката надворешна тангента ги допира првите две полукружници. Пресметај го количникот $\frac{P_{EUV}}{P_{EAC}}$, во функција од $r_1=\frac{1}{2}\overline{AB}$ и $r_2=\frac{1}{2}\overline{BC}$.

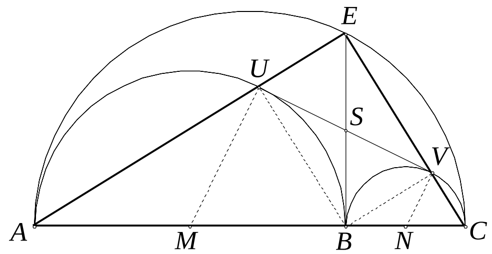
   Решение. Од $\overline{BE}^2=2r_1\cdot 2r_2$ добиваме $\overline{BE}=2\sqrt{r_1r_2}$. Од друга страна

$$\overline{UV}^2=\overline{MN}^2-(\overline{MU}-\overline{NV})^2=4r_1r_2$$

   (M и N се центри на полукружниците), а од овде добиваме

$$\overline{UV}=2\sqrt{r_1r_2}=\overline{BE}.$$

   Понатаму, $\overline{SU}=\overline{SB}=\overline{SV}=\frac{1}{2}\overline{UV}=\sqrt{r_1r_2}=\overline{ES}$, па според тоа четириаголникот $BVEU$ е правоаголник, бидејќи дијагоналите му се еднакви и се половат. Бидејќи аглите $\measuredangle BUA$ и $\measuredangle EUB$ се прави, точките A,U,E се колинеарни. Слично се докажува дека истото е исполнето и за точките $E,V,$



Црт. 21.5.

C. Понатаму, $\triangle EUV$ е складен со $\triangle UEB$ кој е сличен со $\triangle ECA$. Затоа $\triangle EUV$ и $\triangle ECA$ се слични со коефициент на сличност $k=\frac{\overline{UV}}{\overline{AC}}=\frac{\sqrt{r_1r_2}}{r_1+r_2}$. Според тоа

$$\frac{P_{EUV}}{P_{ECA}}=k^2=\frac{r_1r_2}{(r_1+r_2)^2}.$$

3. Нека p е прост број и $n\in\mathbb{N}$. Докажи дека следниве тврдења се еквивалентни:

(i) Биномните коефициенти $\binom{n}{k}$, $k=0,1,2,...,n$ не се деливи со p,

(ii) n може да се претстави во облик $n=p^sq-1$, каде s и q се цели броеви такви што $s\geq 0$, $0<q<p$.

Решение. Нека $n+1=p^sq$, каде $s\geq 0$, а q е цел број кој не е делив со p. Да претпоставиме дека не е исполнето тврдењето (ii), т.е. дека $q>p$. Тогаш за $k=p^s(q-p)$, $0<k<n$ и

$$\binom{n}{k}=\binom{n}{k-1}\frac{n+1-k}{k}=\binom{n}{k-1}\frac{p^{s+1}}{p^s(q-p)}=\binom{n}{k-1}\frac{p}{q-p},$$

т.е. $p\,|\binom{n}{k}$, па не е испонето тврдењето (i). Значи, од (i) следува (ii).

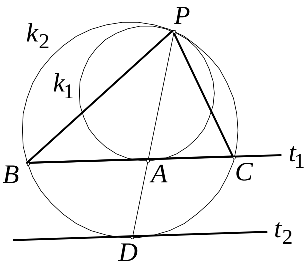
Обратното, да претпоставиме дека не е исполнето (ii), т.е. дека $0<q<p$. Ќе докажеме, со индукција по k, $0\leq k\leq n$, дека не е исполнето (i), т.е. дека $p\nmid\binom{n}{k}$. Јасно, $p\nmid\binom{n}{0}$. Да претпоставиме дека $p\nmid\binom{n}{k-1}$ за некој k, $1\leq k\leq n$. Нека $k=p^tr$, каде што r е цел број кој не е делив со p. Понатаму, $t\leq s$, а ако $t=s$, тогаш $r<q$. Затоа $p\nmid(p^{s-t}q-r)$. Конечно, од

$$\binom{n}{k}=\binom{n}{k-1}\frac{n+1-k}{k}=\binom{n}{k-1}\frac{p^sq-p^tr}{p^tr}=\binom{n}{k-1}\frac{p^{s-t}q-r}{r},$$

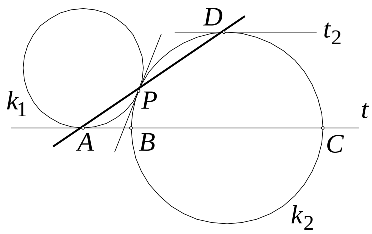
следува дека $p\nmid\binom{n}{k}$.

4. Две кружници се допираат (одвнатре или однадвор) во точка P. Правата t ја допира едната од кружниците во точка A и ја сече другата кружница во точки B и C. Докажи дека правата PA е симетрала на еден од аглите меѓу правите PB и PC.

Решение. Разгледуваме хомотетија со центар во P која кружницата k_1 ја пресликува во кружницата k_2. Оваа хомотетија ја пресликува точката A во точката $D=PA\cap k_2$, а тангентата t_1 на кружницата k_1 во тангента t_2 на кружницата k_2, која е паралелна со t. Затоа точката D е средина на лакот



Црт. 21.6.



Црт. 21.7.

BC од кружницата k_2, од што следува дека PD е симетрала на внатрешниот или надворешниот агол кај точката P на триаголникот CPB.

5. Десет играчи почнале да играат игра, секој со иста сума пари. Еден по друг секој од нив фрлал по пет коцки. По секое фрлање, играчот кој ги фрлил коцките му исплаќа на секој од своите девет соиграчи сума еднаква на $n-$тиот дел од сумата која овој ја имал пред последното фрлање на коцките, каде n е збирот на броевите кои ги покажале коцките. Кога последниот, десеттиот играч ги фрлил коцките збирот на броевите кои го покажале бил 12, и по извршеното плаќање се покажало дека секој играч имал еднаква сума на пари како и на почетокот на играта.

   Најди ги, ако тоа е можно, збировите на броевите кои ги покажале коцките во претхгодните девет фрлања.

   Решение. Нека T е сумата со која секој играч ја почнал играта и нека n_j е вкупниот збир кој го покажале коцките во $j-$тото фрлање. Играчот со број i непосредно по $i-1$ - то фрлање има вкупна сума на пари

$$S = T(1+\frac{1}{n_1})(1+\frac{1}{n_2})...(1+\frac{1}{n_{i-2}})(1+\frac{1}{n_{i-1}}).$$

Во следното фрлање играчот i мора да плаќа. Тој мора да плати вкупно $\frac{1}{n_i}(10T-S)$, па му останува

$$S-\frac{1}{n_i}(10T-S) = T[(1+\frac{1}{n_1})(1+\frac{1}{n_2})...(1+\frac{1}{n_{i-2}})(1+\frac{1}{n_{i-1}})-\frac{10}{n_i}].$$

По десет фрлања тој вкупно има

$$T[(1+\frac{1}{n_1})(1+\frac{1}{n_2})...(1+\frac{1}{n_{i-2}})(1+\frac{1}{n_{i-1}})-\frac{10}{n_i}(1+\frac{1}{n_{i+1}})...(1+\frac{1}{n_{10}})]$$

пари, што е еднакво на почетната сума на пари T. За $i=0,1,...$ воведуваме ознаки $a_i=(1+\frac{1}{n_{i+1}})...(1+\frac{1}{n_{10}})$ и $a_{10}=1$. Така добиваме систем од десет линеарни равенки со десет непознати:

$$a_0-\frac{10}{n_i}a_i=1,\ i=1,2,...,10.$$

Со одземање на $i-$тата и $(i+1)-$та равенка добиваме

$$n_{i+1}+1=n_i,\ i=1,2,...,9.$$

Од $n_{10}=12$ се добива $n_9=13$, $n_8=14$,..., $n_1=21$.

Со непосредна проверка се покажува дека играта се одвивала на опишаниот начин.

6. Во множеството цели броеви реши ја равенката

$$x^3+x^2y+xy^2+y^3=8(x^2+xy+y^2+1).$$

Решение. Да забележиме дека x и y мора да бидат со иста парност, па $u=\frac{x+y}{2}$ и $v=\frac{x-y}{2}$ се цели броеви. Равенката го добива обликот

$$u^3+uv^2=2(3u^2+v^2+1),$$

односно

$$(u-2)(u^2+v^2)=4u^2+2.$$

Очигледно, $u>2$, па затоа $4u^2+2<5(u^2+v^2)$, од каде што следува дека $u-2<5$. Со проверка на броевите $u\in\{3,4,5,6\}$ се добиваат целобројни решенија $u=5$, $v=\pm3$. Според тоа $(x,y)=(8,2)$ или $(x,y)=(2,8)$.