Прва мала македонска математичка олимпијада 2022
Скопје, 18.06.2022, Машински факутет
V одделение

1. Марија има книги со три големини (височини): мала, средна и голема. Тие се поставени на полица (види цртеж). Таа во еден потег може да го промени местото на две книги. Колку најмалку потези треба да направи Марија, за да книгите се наредени по височина (големина) од најмала до најголема гледајќи од лево кон десно?

(A) 2 **(B) 3** **(C) 4** **(D) 5** **(E) 6**

Решение.//Местата треба да си ги сменат

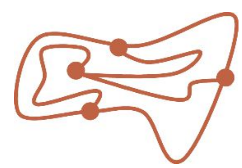
1.првата и седмата книга

2.четвртата и осмата

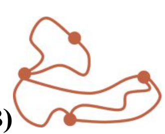
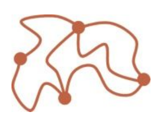
3.третата шестата

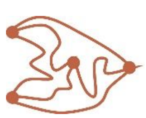
книга.

Значи, вкупно три преместувања на дадените книги за да тие бидат во распоред од најниска до највисока. Точен е одговорот под (B).



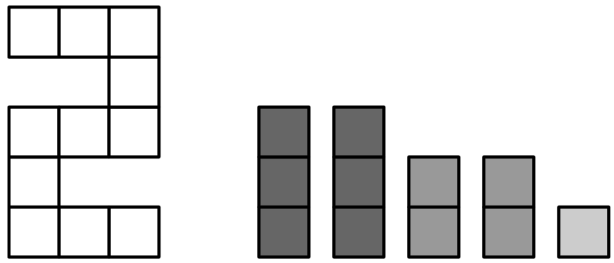
2. Гордан имал шест врвки кои ги врзал меѓу себе и добил четири чворови (види цртеж). Потоа добиената форма тој ја фрлил на под. На кој од дадените цртежи е прикажана формата на Гордан?

(A)  **(B)**  **(C)** 

(D)  **(E)** 

Решение.//Врвките се поврзани во четири чвора а во секој круг има по три врвки. Тоа е единствено точно во случајот (D).

3. Колку има различни можности да цифрата 2 (најлево на дадениот цртеж) целосно да се покрие со петте помали фигури кои се десно од неа (малите фигури не се преклопуват и секоја од нив покрива онолку квадратчиња од колку што е составена)?



(A) 2 **(B) 3** **(C) 5** **(D) 8** **(E) 10**

Решение.// **.**//Не е тешко да се види дека тоа може да се направи на 10 различни начини. При тоа плочките составени од три квадратчиња може да се поставуваат вертикално и хоризонатално. При тоа ги имаме следните можности:

а)Ако ги поставуваме хоризонтално. Имаме три можности.

Најгорната редица во која имаме три полиња и во средната редица со три полиња.

Најгорната редица во која имаме три полиња и во најдоланата редица со три полиња

Втората редица(средната редица со три полиња) и најдолната редица со три полиња.

Во овие ситуации лесно се проверува дека имаме по едно разместување во првиот и третиот случај и три можности во третото разместување.

б)Ако поставуваме една хоризонатално а друга вертикално имаме две можности.

Десни три полиња вертикално и последна редица хоризонатално со три квадрати

Лево три полиња вертикално и една најгорна редица хоризонатално со три квадрати.

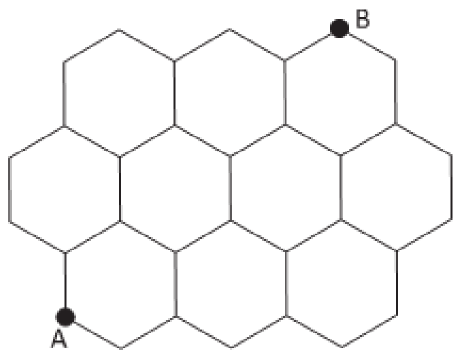
Во секој од овие случаи имаме по две можности за да ги распоредиме останатите фигури со две е и едно квадратче.

в) Две вертикално поставен фигури со по три квадратчиња.

Во оваа ситуација имаме само една можност за дополнително распоредување на останатие плочки со по две и едно квадратче.

Значи, вкупно имаме 10 можности и точен е одговорот под (Е).

4. Движењето од точката А до точката В е можно само по страните на шестаголниците кои се дадени на цртежот. Колку има различни најкратки патишта од точката А до точката В?



(A)1 **(B)2** **(C)3** **(D)4** **(E) повеќе од 4**

Решение.//Најкраткото растојание е 8. Такви патишта има 4.

5. Во едно одделение има 35 ученици, од кои 20 се членови на математичката, а 11 членови на спорската секција. Колку математичари се занимаваат и со спорт, ако се знае дека 10 ученици не се ниту во математичката ниту во спортската секција?

Одговор. Бројот на математичарите кои се занимаваат и со спорт е _6_.
Решение./Вкупниот број на ученици кои се во една или друг секција е 35-10=25. Нека групата А е ученици во математичката секција а групата В е ученици во спортската секција. Тогаш

$$|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|$$
$$25=20+11-|A\cap B|$$

Според тоа, бројот на ученици кои се и во двете секции е 31-25=6.

6. Збирот на два броја е 2022. Ако на едниот број му додадеме 222, а на другиот му одземеме 200, ќе добиеме еднакви броеви. Кои се тие броеви?
Одговор. Броевите се ______ и ________.
Решение./Од условите на задачата имаме дека $x+y=2022$. Од друга страна за истите тие броеви имаме дека $x+222=y-200$, односно $y=x+422$. Сега, со замена во првата равенка имаме дека

$$x+x+422=2022$$
$$2x=1600$$
$$x=800$$

Според тоа, едниот број е 800 а другиот е 1222.

7. Квадрат е поделен на 9 еднакви квадрати. Во секој од нив(во делбените квадрати) е впишан било кој од броевите 1, 2 и 3. Дали може во секоја редица, секоја колона и секоја дијагонала збировите на броевите во нив да се различни?
Решение.// Вкупниот број на збирови кои може да се појават во збир на три квадратчиња кои се наведени во текстот на задачата е од најмалиот 1+1+1=3 до најголемиот 3+3+3=9. Исто така секој друг збир е можен: 1+1+2=4,1+1+3=5, 1+2+3=6,+1+3+3=7, 2+3+3=8. Вкупниот број на броеви кои мораме да ги запишеме е 3+3+2=8 броја. Но ние имаме 9-2=7 броја, кои се различни меѓу себе, а треба да ги запишеме во 8 полиња. Значи еден ист број мора да е запишан два пати. Според тоа, точни одговор е НЕ МОЖЕ.

8. Дали може во полињата на квадратна 10x10 табла да се запишат 10 десетки,10 деветки, 10 осумки, 10 седумки, 10 шестки, 10 петки, 10 четворки, 10 тројки, 10 двојки и 10 единици, во секое поле по еден број, така што во секој 5×5 квадрат збирот на броевите да е еднаков?
Решение.// Не е можно. Со две линии ќе го поделиме квадратот на четири еднакви дела, при што секој квадрат е со димензии 5x5. И нека претпоставиме спротивно, т.е. дека во секој во квадртите збирот на броевите е ист. Нека тој број е S. Тогаш збирот на броевите е 4S. Но Збирот на реалниот збир на броевите е

K=10+20+30+40+50+60+70+80+90+100=10(1+2+3+4+5+6+7+8+9+10)=550

Значи 4S=550. Бројот S е природен број, и S=550/4, што не е можно. Значи, бараната распределба на броевите не постои.

Точни одговори

1	2	3	4	5	6	7	8
B	D	E	D	6	800 и 1022	не може	не може