

## РАЗЛИЧНИ ДОКАЗИ НА ЕДНО АЛГЕБАРСКО НЕРАВЕНСТВО

Во оваа труд ќе дадеме три различни докази на едно алгебарско неравенство кое гласи:

$$(x + y + z)\sqrt{3xyz(x + y + z)} \leq xyz + (y + z)(z + x)(x + y); \quad (x, y, z > 0) \quad (1)$$

Првите два докази се доста комплицирани и бараат одредени познавања од теорија на полиноми, геометрија и геометриски неравенства. За среќа третиот доказ ќе биде наједноставен а за него ќе користиме само еден алгебарски идентитет. Поради сето ова и насловот на статијата е ваков. Зошто да е едноставно кога може и да е комплицирано? Во продолжение следуваат тие докази.

**Доказ 1.** Во овој доказ неравенството (1) ќе го преставиме во геометриско неравенство користејќи ја следната лема:

*Лема.* Реалните броеви  $a, b$  и  $c$  се должини на страни на еден триаголник ако и само ако постојат реални позитивни броеви  $x, y$  и  $z$  такви што  $a = y + z$ ,  $b = x + z$  и  $c = x + y$ .

(Доказот на оваа лема може да се најде во [1], стр. 258).

Сега имаме

$$s = \frac{a + b + c}{2} = x + y + z, \quad (2)$$

$$P = \sqrt{s(s - a)(s - b)(s - c)} = \sqrt{(x + y + z)xyz} \quad (3)$$

$$r = \frac{P}{s} = \frac{\sqrt{xyz}}{x + y + z} \quad (4)$$

$$R = \frac{abc}{4P} = \frac{(x + y)(y + z)(z + x)}{4\sqrt{(x + y + z)xyz}}. \quad (5)$$

Неравенството (1) ќе го запишеме во облик

$$(x + y + z)\sqrt{3} \leq \sqrt{\frac{xyz}{x + y + z}} + \frac{(y + z)(z + x)(x + y)}{\sqrt{xyz(x + y + z)}}, \quad (6)$$

или поради (2),(3),(4) и (5)

$$s\sqrt{3} \leq r + 4R. \quad (7)$$

Сега доволно е да се докаже неравенството (7). Ќе го користиме познатото равенство:

$$4R + r = r_a + r_b + r_c, \quad (8)$$

каде  $R$  и  $r$  се радиуси на опишаната и впишаната кружница, а  $r_a, r_b$  и  $r_c$  се  
однаков впишаните кружници во триаголникот.

Сега од (8) имаме:

$$(4R+r)^2 = (r_a + r_b + r_c)^2. \quad (9)$$

Бидејќи

$$(r_a + r_b + r_c)^2 \geq 3(r_a r_b + r_b r_c + r_a r_c),$$

$$\left( \Leftrightarrow \frac{1}{2} \left[ (r_a - r_b)^2 + (r_b - r_c)^2 + (r_c - r_a)^2 \right] \right),$$

од (9) добиваме

$$(4R+r)^2 \geq 3(r_a r_b + r_b r_c + r_a r_c).$$

Сега, заради

$$r_a = \frac{P}{s-a}, \quad r_b = \frac{P}{s-b}, \quad r_c = \frac{P}{s-c},$$

имаме,

$$(4R+r)^2 \geq 3 \left[ \frac{P^2}{(s-a)(s-b)} + \frac{P^2}{(s-a)(s-b)} + \frac{P^2}{(s-a)(s-b)} \right] =$$

$$= 3P^2 \frac{s-c+s-b+s-a}{(s-a)(s-b)(s-c)} =$$

$$= \frac{3s(s-a)(s-b)(s-c)(3s-2s)}{(s-a)(s-b)(s-c)} =$$

$$= 3s^2,$$

т.е.

$$(4R+r)^2 \geq 3s^2,$$

а од овде

$$s\sqrt{3} \leq r+4R,$$

што требаше и да се докаже.

Значи неравенството (7) е точно па точно е и на него еквивалентното  
неравенство (6), односно даденото неравенство (1).

Во неравенството (7) е исполнето равенство ако и само ако  $r_a = r_b = r_c$ , т.е.  
 $a = b = c$ , односно во (6) вреди равенство ако и само ако е  $x = y = z$ , кога што  
е исполнето равенство и во (1).

**Забелешка 1.** Неравенството  $s\sqrt{3} \leq r+4R$  може да се докаже и со  
примена на неравенството

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 4P\sqrt{3} + (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2,$$

што е последица на познатото неравенство на Финслер-Хадвигер како и  
познатите неравенства

$$a^2 + b^2 + c^2 = 2(s^2 - r^2 - 4Rr)$$

и

$$ab + bc + ca = s^2 + r^2 + 4Rr.$$

Или, пак да се докаже дека вреди тригонометриското неравенство

$$\sqrt{3}(\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma) \leq 3 + \cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma$$

па оттука со користење на познатите тригонометриски равенства:

$$\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma = \frac{s}{R},$$

и

$$\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma = 1 + \frac{r}{R}$$

одма се добива неравенството (7).

Би било добро да секој читател (ученици) индивидуално ги докажат сите споменати равенства во оваа забелешка.

**Доказ 2.** Овде ќе искористиме некои факти од теоријата за симетрични полиноми. Полиномите  $f_1(x, y, z) = x + y + z$ ,  $f_2(x, y, z) = xy + yz + zx$ ,  $f_3(x, y, z) = xyz$  се елементарни симетрични полиноми, па заради тоа што  $f(z) = (y + z)(z + x)(x + y)$  е симетричен полином, можеме да го запишеме во облик на полином чии променливи се елементарни симетрични полиноми.

На тој начин имаме

$$\begin{aligned} f(z) &= (y + z)(z + x)(x + y) = x^2y + xy^2 + x^2z + xz^2 + y^2z + yz^2 + 2xyz = \\ &= (x^2 + y^2 + z^2)(x + y + z) - (x^3 + y^3 + z^3) + 2xyz \end{aligned}$$

и ставајќи  $\sigma_1 = x + y + z$ ,  $\sigma_2 = xy + yz + zx$  и  $\sigma_3 = xyz$ , добиваме:

$$f_2(x, y, z) = (\sigma_1^2 - 2\sigma_2)\sigma_1 - (\sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3) + 2\sigma_3,$$

т.е.

$$f_2(x, y, z) = \sigma_2\sigma_1 - \sigma_3. \quad (10)$$

Неравенството (1), заради (10), сега го добива обликот:

$$\begin{aligned} \sigma_1\sqrt{3\sigma_3\sigma_1} \leq \sigma_3 + \sigma_1\sigma_2 - \sigma_3 &\Leftrightarrow \sqrt{3\sigma_3\sigma_1} \leq \sigma_2 \Leftrightarrow \\ 3\sigma_3\sigma_1 \leq \sigma_2^2 &\Leftrightarrow 3xyz(x + y + z) \leq (xy + yz + zx)^2 \Leftrightarrow \\ x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 \geq x^2yz + xy^2z + xyz^2 &\Leftrightarrow \\ \frac{1}{2}[(xy - xz)^2 + (xy - yz)^2 + (xz - yz)^2] \geq 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Последното неравенство е точно.

Според тоа, неравенството (11) е точно, па според тоа точно е и еквивалентното на него неравенство (1). Се разбира во (11) ва`и равенство ако и само ако е исполнето  $x = y = z$ , а тогаш е исполнето равенство и во (1).

**Забелешка 2.** До неравенството (10) може да се дојде и на следниот начин:

$$f(x, y, z) = (\sigma_1 - z)(\sigma_1 - x)(\sigma_1 - y) = \dots = \sigma_1\sigma_2 - \sigma_3.$$

**Доказ 3.** За овој доказ ќе го користиме следниот идентитет:

$$(y+z)(z+x)(x+y) = (x+y+z)(xy+yz+zx) - xyz. \quad (12)$$

Заради низата од еквиваленции:

$$\begin{aligned} (x+y+z)\sqrt{3xyz(x+y+z)} &\leq xyz + (y+z)(z+x)(x+y) \\ &\stackrel{12}{\Leftrightarrow} (x+y+z)\sqrt{3xyz(x+y+z)} \leq xyz + (x+y+z)(xy+yz+zx) - xyz \\ &\Leftrightarrow (x+y+z)^2 \cdot 3xyz(x+y+z) \leq [(x+y+z)(xy+yz+zx)]^2 \\ &\Leftrightarrow 3xyz(x+y+z) \leq (xy+yz+zx)^2 \\ &\Leftrightarrow x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 \geq x^2yz + xy^2z + xyz^2 \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{2} \left[ (xy-xz)^2 + (xy-yz)^2 + (yz-xz)^2 \right] \geq 0, \end{aligned}$$

и бидејќи последното неравенство е точно, добиваме дека и почетното неравенство е точно.

Од овие докази сигурно се гледа и оправданоста на коментарот на почетокот на оваа статија. Секако доказот 3 е убав и елегантен; не е ни многу тежок доколку се знае идентитетот (12). На мислење сум дека оваа статија е поучна и корисна за младите математичари и наставниците кои работат со надарените ученици.

### Литература:

- [1] Š. Arslanagić, *Matematika za nadarene*, Bosanska riječ, Sarajevo, 2004.
- [2] V. Devidè, *Čudesna matematika – pogled iznutra i izvana*, Hrvatsko matematičko društvo, Zagreb, 2010.
- [3] B. Pavković, D. Veljan, *Elementarna matematika I*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1992.
- [4] A. Малчески, „Симетрични полиноми од три променливи”, списание СИГМА, год.вол.26, 2005/2006, бр. но.1/69, бр. но.2/70, бр. но.3/71.