Даниел Велинов
Скопје

НЕКОИ МЕТОДИ ЗА РЕШАВАЊЕ НА ДИОФАНТОВИ РАВЕНКИ

Во оваа статија ќе разгледаме некои карактеристични примери на квадратни Диофантови равенки. Во прилог на теориските разгледувања ќе бидат дадени и задачи кои се задавани на некои од порепомираните меѓународни натпревари или на националните изборни натпревари.

Генерално во Диофантовите равенки можат да се појават три проблеми. Првиот проблем е егзистенцијата на решение, вториот проблем е ако равенката има решение, да се определи бројот на решенијата, дали е конечен или бесконечен и третиот проблем се однесува на наоѓање на сите тие решенија.

Да ја разгледаме равенката $f(x_1, x_2, ..., x_n) = 0$, каде f е функција од n независни променливи и $n \geq 2$. Ваквата равенка ќе ја нарекуваме Диофантова равенка. Ако f е полином со целобројни коефициенти, тогаш равенката ја нарекуваме алгебарска Диофантова равенка. Равенката $f(x_1, x_2, ..., x_n) = 0$ ја запишуваме во еквивалентна форма $f_1(x_1, x_2, ..., x_n) f_2(x_1, x_2, ..., x_n) \cdot ... \cdot f_k(x_1, x_2, ..., x_n) = a$, каде $f_1, f_2, ..., f_k$ се функции со вредности на множеството цели броеви и $a \in \mathbb{Z}$. Ако бројот a го запишеме во неговата природна факторизација, ќе добиеме конечно многу декомпозиции на k множители $a_1, a_2, ..., a_k$. Секоја таква факторизација ни дава систем од равенки

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, ..., x_n) = a_1 \\ f_2(x_1, x_2, ..., x_n) = a_2 \\ \vdots \\ f_k(x_1, x_2, ..., x_n) = a_k \end{cases}.$$

Решенијата на сите вакви системи го дава множеството од сите решенија на равенката $f(x_1, x_2, ..., x_n) = 0$. Во продолжение ќе дадеме неколку примери, меѓу кои и примери од изборните натпревари на земјите кои учествуваат на ИМО.

Пример 1. Нека p и q се прости броеви. Во множеството природни броеви реши ја равенката

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{pq}.$$

Решение. Равенката $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{pq}$ е еквивалентна на равенката

$$(x - pq)(y - pq) = p^2 q^2.$$

Да забележиме дека $\frac{1}{x} < \frac{1}{pq}$, па затоа $x > pq$. Разгледувајќи ги сите позитивни делители на $p^2 q^2$ ги добиваме следниве системи равенки:

$$\begin{cases} x - pq = 1 \\ y - pq = p^2 q^2 \end{cases}, \quad \begin{cases} x - pq = p \\ y - pq = pq^2 \end{cases}, \quad \begin{cases} x - pq = q \\ y - pq = p^2 q \end{cases}, \quad \begin{cases} x - pq = p^2 \\ y - pq = q^2 \end{cases}, \quad \begin{cases} x - pq = pq \\ y - pq = pq \end{cases},$$

$\begin{cases} x-pq=pq^2 \\ y-pq=p \end{cases}$, $\begin{cases} x-pq=p^2q \\ y-pq=q \end{cases}$, $\begin{cases} x-pq=q^2 \\ y-pq=p^2 \end{cases}$, $\begin{cases} x-pq=p^2q^2 \\ y-pq=1 \end{cases}$,

од каде ги добиваме решенијата: $(1+pq, pq(1+pq))$, $(p(1+q), pq(1+q))$, $(q(1+p), pq(1+p))$, $(p(p+q), q(p+q))$, $(2pq, 2pq)$, $(pq(1+q), p(1+q)$, $(pq(1+p), q(1+p))$, $(q(p+q), p(p+q))$, $(pq(1+pq), 1+pq)$. ■

Да ја разгледаме равенката $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{n}$, која е генерализација на претходната равенка. Равенката $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{n}$, каде $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}...p_k^{\alpha_k}$ има $(2\alpha_1+1)\cdot...\cdot(2\alpha_k+1)$ решенија во множеството природни броеви. Навистина, последната равенка е еквивалентна со равенката $(x-n)(y-n)=n^2$, а бројот $n^2=p_1^{2\alpha_1}p_2^{2\alpha_2}...p_k^{2\alpha_k}$ има $(2\alpha_1+1)\cdot...\cdot(2\alpha_k+1)$ позитивни делители.

Пример 2. (Indian mathematical Olympiad). Определи ги сите парови природни броеви (x, y) за кои важи $(xy-7)^2=x^2+y^2$.

Решение. Дадената равенка последователно е еквивалентна со равенките

$$(xy-6)^2+13=(x+y)^2,$$
$$(xy-6)^2-(x+y)^2=-13,$$
$$\big(xy-6-(x+y)\big)\big(xy-6+(x+y)\big)=-13.$$

Оттука, ги добиваме системите равенки

$$\begin{cases} xy-6-(x+y)=-1 \\ xy-6+(x+y)=13 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} xy-6-(x+y)=-13 \\ xy-6+(x+y)=1 \end{cases}.$$

Овие системи се еквивалентни со системите равенки

$$\begin{cases} x+y=7 \\ xy=12 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} x+y=7 \\ xy=0 \end{cases}.$$

Конечно, решенијата на дадената равенката се $(3,4),(4,3),(0,7),(7,0)$. ■

Пример 3. (Polish mathematical Olympiad). Определи ги сите парови цели броеви (x, y) за кои важи: $x^2(y-1)+y^2(x-1)=1$.

Решение. Воведувајќи смени $x=u+1$, $y=v+1$ дадената равенка се сведува на равенката $(u+1)^2v+(v+1)^2u=1$, која е еквивалентна со равенката

$$uv(u+v)+4uv+(u+v)=1 .$$

Последната равенка можеме да ја запишеме како $uv(u+v+4)+(u+v+4)=5$,
од каде добиваме

$$(u+v+4)(uv+1)=5 .$$

Бидејќи $5=5\cdot 1=(-5)\cdot(-1)$ Од последната равенка ги добиваме системите равенки

$$\begin{cases} u+v+4=5 \\ uv+1=1 \end{cases}, \begin{cases} u+v+4=-5 \\ uv+1=-1 \end{cases}, \begin{cases} u+v+4=1 \\ uv+1=5 \end{cases}, \begin{cases} u+v+4=-1 \\ uv+1=-5 \end{cases}.$$

Од добиените системи само првиот и последниот систем имаат целобројни решенија. Тие се $(0,1),(1,0),(-6,1),(1,-6)$. Конечно, бидејќи $(x,y)=(u+1,v+1)$, решенијата на почетната равенка се паровите $(1,2),(-5,2),(2,1),(2,-5)$. ■

Пример 4. Определи ги сите цели броеви n за кои равенката

$$x^3+y^3+z^3-3xyz=n$$

има решение во множеството природни броеви.

Решение. Ќе ги користиме идентитетот

$$x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$$

кој го презапишуваме во обликот

$$x^3+y^3+z^3-3xyz=\tfrac{1}{2}(x+y+z)((x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2) \qquad (1)$$

и идентитетот

$$x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)^3-3(x+y+z)(xy+yz+zx) \qquad (2)$$

Од (1) гледаме дека равенката има решение во множеството природни броеви за $n=3k+1$ и $n=3k+2$, $k\ge 1$, бидејќи тројките $(k+1,k,k)$ и $(k+1,k+1,k)$ се решенија на дадената равенка.

Ако $n=3k$, тогаш од (2) следува дека $x+y+z$ е деливо со 3, па $n=x^3+y^3+z^3-3xyz$ е деливо со 9. Обратно, нека дадената равенка има решенија во множеството природни броеви за сите $n=9k$, $k\ge 2$, бидејќи тројките од облик $(k-1,k,k+1)$ ја задоволуваат равенката, како и за $n=0$ (решенија се $x=y=z$).

Значи, дадената равенка има решение во множеството на природни броеви за $n=3k+1$, $n=3k+2$, $k\ge 1$ и $n=9k$, $k=0,2,3,4,...$. ■

Пример 5. Најди ги сите тројки природни броеви (x,y,z) за кои важи

$$x^3+y^3+z^3-3xyz=p,$$

каде p е прост број поголем од 3.

Решение. Равенката чии решенија се бараат е еквивалентна со равенката

$$(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)=p.$$

Бидејќи $x+y+z>1$, мора $x+y+z=p$ и $x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx=1$. Последната равенка е еквивалентна со равенката $(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2=2$. Без губење на општоста, можеме да претпоставиме дека $x\ge y\ge z$. Ако $x>y>z$, имаме $x-y\ge 1, y-z\ge 1$ и $x-z\ge 2$, од каде добиваме $(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\ge 6>2$.

Затоа мора да важи $x = y = z+1$ или $x-1 = y = z$. Простиот број p е од облик $3k+1$ или $3k+2$. Во првиот случај решенијата се $(\frac{p+2}{3}, \frac{p-1}{3}, \frac{p-1}{3})$ и сите пермутации. Во вториот случај решенија се $(\frac{p+1}{3}, \frac{p+1}{3}, \frac{p-2}{3})$ и сите пермутации. ■

Друг метод со кој би можеле да решаваме Диофантови равенки е користењето на неравенства. Овој метод ни овозможува преку користење на соодветни неравенства да добиеме интервали во кои лежи или лежат непознатите кои се јавуваат во равенката. Обично, со овој метод се добиваат конечно многу можности за сите непознати или за дел од непознатите. Ќе дадеме неколку примери.

Пример 6. (Romanian mathematical Olympiad). Во множеството природни броеви реши ја равенката

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{3}{5}.$$

Решение. Имајќи во предвид дека решенијата се симетрични, па затоа без губење на општоста можеме да претпоставиме дека $2 \le x \le y \le z$. Од овде го добиваме неравенството $\frac{3}{x} \ge \frac{3}{5}$, па затоа $x \in \{2,3,4,5\}$.

Ако $x = 2$, тогаш $\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{10}$, од каде следува $y \in \{11,12,...,20\}$. Сега $z = 10 + \frac{100}{y-100}$ и $y-10 \mid 100$. Ги добиваме решенијата $(2,11,110)$, $(2,12,60)$, $(2,14,35)$, $(2,15,30)$, $(2,20,20)$.

Ако $x = 3$, имаме $\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{4}{15}$, каде $y \in \{3,4,5,6,7\}$. Ги добиваме решенијата $(3,4,60)$, $(3,5,15)$, $(3,6,10)$.

Ако $x = 4$, тогаш $\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{7}{20}$, каде $y \in \{4,5\}$, па решение е $(4,4,10)$.

Ако $x = 5$, тогаш $\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{2}{5}$ и $y = z = 5$, го добиваме решението $(5,5,5)$. ■

Пример 7. (Hungarian mathematical Olympiad) Најди ги сите решенија x, y во множеството на природните броеви на равенката

$$x^3 + (x+1)^3 + (x+2)^3 + ... + (x+7)^3 = y^3.$$

Решение. Нека

$$P(x) = x^3 + (x+1)^3 + (x+2)^3 + ... + (x+7)^3 = 8x^3 + 84x^2 + 420x + 784.$$

Ако $x \ge 0$, тогаш

$$(2x+7)^3 = 8x^3 + 84x^2 + 294x + 343 < P(x) < 8x^3 + 120x^2 + 600x + 1000 = (2x+10)^3,$$

па $2x+7 < y < 2x+10$. Оттука $y = 2x+8$ или $y = 2x+9$. Но, ниту една од равенките

$$P(x) - (2x+8)^3 = -12x^2 + 36x + 272 = 0$$

$$P(x) - (2x+9)^3 = -24x^2 - 66x + 55 = 0$$

нема цели корени, па нема решенија за $x \ge 0$. Понатаму, да забележиме дека за P важи $P(-x-7) = -P(x)$, па (x, y) е решение ако и само ако $(-x-7, -y)$ е решение. Па, не постојат решенија на равенката за $x \leq -7$. За да (x, y) биде решение, мора да важи $-6 \leq x \leq -1$. За $-3 \leq x \leq -1$, имаме $P(-1) = 440$, кој не е точен куб, додека за $P(-2) = 216 = 6^3$ и $P(-3) = 64 = 4^3$, па $(-2, 6)$ и $(-3, 4)$ се единствените решенија за $-3 \leq x \leq -1$. Следува, $(-4, -4)$ и $(-5, -6)$ се единствените решенија кога $-6 \leq x \leq -4$. Конечно, единствените решенија на равенката се

$$(-2, 6),\ (-3, 4),\ (-4, -4),\ (-5, -6). \ \blacksquare$$

Пример 8. (UK mathematical Olympiad). Најди ги сите тројки природни броеви (x, y, z) за кои важи

$$(1+\tfrac{1}{x})(1+\tfrac{1}{y})(1+\tfrac{1}{z}) = 2.$$

Решение. Без губење на општоста можеме да претпоставиме дека $x \geq y \geq z$. Според тоа важи $2 \leq (1+\frac{1}{z})^3$, од каде добиваме $z \leq 3$.

Ако $z = 1$, тогаш $(1+\frac{1}{x})(1+\frac{1}{y}) = 1$, што не е можно.

Ако $z = 2$ имаме $(1+\frac{1}{x})(1+\frac{1}{y}) = \frac{4}{3}$. Следува, $\frac{4}{3} \leq (1+\frac{1}{y})^2$, од каде добиваме $y < 7$. Бидејќи $1+\frac{1}{x} > 1$, добиваме $y > 3$. Заменувајќи ги добиените вредности за y, ги добиваме решенијата $(7, 6, 2)$, $(9, 5, 2)$, $(15, 4, 2)$.

Ако $z = 3$, тогаш $(1+\frac{1}{x})(1+\frac{1}{y}) = \frac{3}{2}$. Аналогно како и во претходниот случај добиваме дека $y < 5$ и $y \geq z = 3$. Така ги добиваме решенијата $(8, 3, 3)$ и $(5, 4, 3)$.

Значи, сите решенија на почетната равенка се сите пермутации на подредените тројки $(7,6,2), (9,5,2), (15,4,2), (8,3,3)$ и $(5,4,3)$. $\blacksquare$

Пример 9. (Putnam mathematical Olympiad). Најди ги сите природни броеви n, $k_1, k_2, ..., k_n$ за кои важи $k_1 + ... + k_n = 5n - 4$ и $\frac{1}{k_1} + ... + \frac{1}{k_n} = 1$.

Решение. Од неравенството помеѓу аритметичка и геометриска средина имаме

$$(k_1 + ... + k_n)\tfrac{1}{k_1} + ... + \tfrac{1}{k_n} \geq n^2.$$

Затоа, мора да важи $5n - 4 \geq n^2$, па $n \leq 4$. Без губење на општоста можеме да претпоставиме дека $k_1 \leq k_2 \leq ... \leq k_n$.

Ако $n = 1$, тогаш $k_1 = 1$.

Ако $n = 2$, тогаш $(k_1, k_2) \in \{(2,4), (3,3)\}$, што не ги задоволува условите на задачата.

Ако $n = 3$, тогаш $k_1 + k_2 + k_3 = 11$, па затоа важи $2 \leq k_1 \leq 3$. Според тоа, $(k_1, k_2, k_3) \in \{(2,2,7), (2,3,6), (2,4,5), (3,3,5), (3,4,4)\}$, од кои само тројката $(2,3,6)$ ги задоволува условите на задачата.

Ако $n = 4$, тогаш во неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина, а тоа е точно само кога $k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = 4$.

Конечно, решенија на задачата се $n = 1$ и $k_1 = 1$, $n = 3$ и (k_1, k_2, k_3) е пермутација на $(2,3,6)$, $n = 4$ и $(k_1, k_2, k_3) = (4,4,4)$.

Задачи за самостојна работа

1. Реши ја равенката $(x^2+1)(y^2+1)+2(x-y)(1-xy)=4(1+xy)$ во множеството на цели броеви.
2. Најди ги сите прости броеви p за кои равенката $x^2+4=py^4$ има решение во множеството на цели броеви.
3. (Indian mathematical Olympiad). За секој природен број n, нека со $s(n)$ го означиме бројот на подредени парови (x,y) од природни броеви за кои важи $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{n}$. Најди ги сите природни броеви n за кои важи $s(n)=5$.
4. (Russian mathematical Olympiad). Најди ги сите парови цели броеви (x,y) кои се решенија на равенката $x^3-y^3=xy+61$.
5. (Romanian mathematical Olympiad) Најди ги сите парови (x,y) кои се решенија на равенката $x^6+3x^3+1=y^4$.
6. (USA mathematical Olympiad). Најди ги сите решенија (x,y) во множеството $\mathbb{Z}\setminus\{0\}$ на равенката $(x^2+y)(x+y^2)=(x-y)^3$.
7. (IMO 1991) Најди ги сите цели броеви a,b,c, $1<a<b<c$, такви што бројот $(a-1)(b-1)(c-1)$ е делител на $abc-1$.
8. (Romanian mathematical Olympiad). Најди ги сите подредени тројки (x,y,z) од природни броеви за кои важи $(x+y)^2+3x+y+1=z^2$.
9. (Australian mathematical Olympiad). Најди ги сите парови природни броеви (x,y) кои се решенија на равенката $(x+1)^4-(x-1)^4=y^3$.
10. (IMO 1987) Нека a и b се природни броеви такви што $ab+1$ е делител на a^2+b^2. Докажи дека $\frac{a^2+b^2}{ab+1}$ е полн квадрат.
11. (Polish mathematical Olympiad). Најди ги сите цели природни броеви a,b,c,x,y,z за кои важи $a+b+c=xyz$, $x+y+z=abc$ и $a\ge b\ge c\ge 1$, $x\ge y\ge z\ge 1$.

Литература

1. T. Andrescu, D. Andrica, I. Cucurezeanu, An Introduction to Diophantine Equations, Springer, New York, 2010.
2. R. D. Carmichael, The Theory of Numbers and Diophantine Analysis, Dover Publications, Inc., New York, 1959.
3. H. Cohen, A Course in Computational Algebraic Number Theory, Springer-Verlag, 1993.
4. D. Djukic, V. Jankovic, I. Matic, N. Petrovic, The IMO compendium, Springer, New York, 2011.
5. R. A. Mollin, Fundamental Number Theory and Applications, CRC Press, New York, 1998.
6. L. J. Mordell, Diophantine Equations, Academic Press, London and New York, 1969.