Слаѓана Брсаковска, Скопје
Самоил Малчески, Скопје

# НЕКОИ ПОСЛЕДИЦИ НА ПИТАГОРОВАТА ТЕОРЕМА

Во редовната настава се запозна со Питагоровата теорема и некои елементарни примени на истата. Во ова наше дружење ќе разгледаме неколку значајни теореми кои се последица од Питагоровата теорема. Исто така ќе се осврнеме и на некои примени на теоремите кои ќе ги докажеме.

## 1. ТЕОРЕМА НА АПОЛОНИЈ

На почетокот ќе ја докажеме теоремата на Аполониј, за што ни се потребни таканаречените Карноови формули.

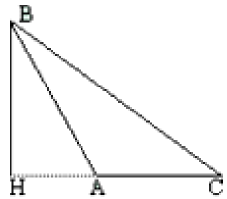
**Лема 1 (Карноови формули).** Нека $ABC$ е произволен триаголник и $H$ е подножјето на висината повлечена од темето $B$. Тогаш

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2 \cdot \overline{AC} \cdot \overline{AH}, \qquad (1)$$

ако је аголот при темето $A$ е остар, а ако овој агол е тап, тогаш важи

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 + 2 \cdot \overline{AC} \cdot \overline{AH}. \qquad (2)$$

**Доказ.** Со примена на Питагоровата теорема на триаголниците $ABH$ и $BCH$ добиваме



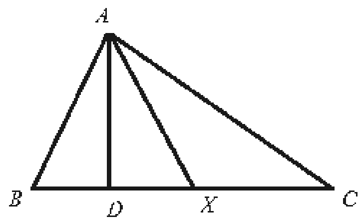

$$\overline{AB}^2 = \overline{AH}^2 + \overline{BH}^2 \text{ и } \overline{BC}^2 = \overline{CH}^2 + \overline{BH}^2.$$

Сега, ако ги одземеме последните две равенства, по средувањето добиваме $\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{CH}^2 - \overline{AH}^2$. Понатаму, ако триаголникот $ABC$ е остар, тогаш $\overline{CH} = \overline{AC} - \overline{AH}$ и со замена во последното равенство го добиваме равенството (1), а ако триаголникот е тапоаголен, тогаш $\overline{CH} = \overline{AC} + \overline{AH}$, па затоа важи равенството (2). ■

**Теорема 1 (Аполониј).** Ако $X$ е точка на страната $BC$ на $\triangle ABC$ таква што важи $\overline{BX} : \overline{CX} = m : n$, тогаш

$$n\overline{AB}^2 + m\overline{AC}^2 = n\overline{BX}^2 + m\overline{CX}^2 + (m+n)\overline{AX}^2. \qquad (3)$$

**Доказ.** Нека $D$ е подножјето на висината повлечена од темето $A$, тогаш $X = D$ или $X \neq D$. Ако $X = D$, тогаш $\overline{AB}^2 = \overline{AX}^2 + \overline{BX}^2$ и $\overline{AC}^2 = \overline{AX}^2 + \overline{CX}^2$. Ако првото равенство го помножиме со $m$, а второто со $n$ и ги собереме го добиваме равенството (3). Ако $X \neq D$, тогаш аглите $AXD$ и $AXC$ не се прави. Сега, од Каарноовите формули следува




$$\overline{AB}^2 = \overline{AX}^2 + \overline{BX}^2 - 2 \cdot \overline{BX} \cdot \overline{DX} \text{ и } \overline{AC}^2 = \overline{AX}^2 + \overline{CX}^2 + 2 \cdot \overline{CA} \cdot \overline{DX}.$$

Ако првото равенство го помножиме со $n$, а второто со $m$, по собирањето на добиените равенства го добиваме равенството (3). ■

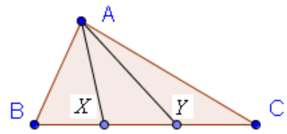
**Задача 1.** Ако $X$ е произволна точка на правоаголникот $ABCD$, тогаш важи $\overline{AX}^2 + \overline{CX}^2 = \overline{BX}^2 + \overline{DX}^2$. Докажи!

**Решение.** Нека $O$ е пресек на дијагоналите $AC$ и $BD$. Бидејќи пресечната точка ги полови дијагоналите, од теоремата на Аполониј следува:

$$\overline{AX}^2+\overline{CX}^2=\overline{AO}^2+\overline{OC}^2+2\overline{OX}^2 \text{ и } \overline{BX}^2+\overline{DX}^2=\overline{BO}^2+\overline{OD}^2+2\overline{OX}^2 .$$

Сега, имајќи предвид дека $\overline{AC}=\overline{BD}$, од последните две равенства следува тврдењето на задачата. ■

**Задача 2.** Ако $X$ и $Y$ се точки на страната $BC$ такви што $\overline{BX}=\overline{XY}=\overline{YC}$, тогаш $\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=\overline{AX}^2+\overline{AY}^2+4\overline{XY}^2$. Докажи!




**Решение.** Од теоремата на Аполониј следува:

$$\overline{AB}^2+\overline{AY}^2=\overline{BX}^2+\overline{XY}^2+2\overline{AX}^2,$$
$$\overline{AX}^2+\overline{AC}^2=\overline{XY}^2+\overline{YC}^2+2\overline{AY}^2.$$

Последните равенства ги собираме, и ако искористиме дека $\overline{BX}=\overline{XY}=\overline{YC}$, по средување на добиеното равенство наоѓаме $\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=\overline{AX}^2+\overline{AY}^2+4\overline{XY}^2$. ■

**Задача 3.** Ако $AA_1, BB_1, CC_1$ се тежишните линии на $\triangle ABC$, а $T$ е неговото тежиште, докажи дека

а) $\overline{AA_1}^2=\frac{1}{4}(2\overline{AB}^2+2\overline{AC}^2-\overline{BC}^2)$,

б) $\overline{AA_1}^2+\overline{BB_1}^2+\overline{CC_1}^2=\frac{3}{4}(\overline{AB}^2+\overline{BC}^2+\overline{CA}^2)$,

в) $\overline{AT}^2+\overline{BT}^2+\overline{CT}^2=\frac{1}{3}(\overline{AB}^2+\overline{BC}^2+\overline{CA}^2)$.

**Решение.** а) Ако искористиме дека $A_1$ е средина на страната $BC$, од теоремата на Аполониј следува $\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=\overline{BA_1}^2+\overline{A_1C}^2+2\overline{AA_1}^2$. Сега во последното равенство заменуваме $\overline{BA_1}=\overline{CA_1}=\frac{1}{2}\overline{BC}$ и ако го изразиме $\overline{AA_1}^2$ го добиваме бараното равенство.

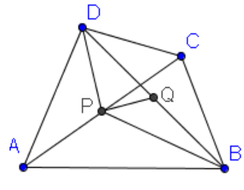
б) Ако според а) ги изразиме $\overline{AA_1}^2$, $\overline{BB_1}^2$ и $\overline{CC_1}^2$ и ги собереме добиените равенства, го добиваме бараното равенство.

в) Ако го искористиме фактот дека тежиштето ја дели тежишната линија во однос 2:1, и равенството под б) го поделиме со $\frac{9}{4}$, го добиваме бараното равенство. ■

**Задача 4.** Ако $P$ и $Q$ се средините на дијагоналите $AC$ и $BD$ на четириаголникот $ABCD$, докажи дека $\overline{PQ}^2=\frac{1}{4}(\overline{AB}^2+\overline{BC}^2+\overline{CD}^2+\overline{DA}^2-\overline{AC}^2-\overline{BD}^2)$.

**Решение.** Отсечките $PQ, BP, DP$ се тежишни линии на триаголниците $BDP$, $BAC, DAC$, соодветно, па од претходната задача следува

$$\overline{PQ}^2=\frac{1}{4}(2\overline{PB}^2+2\overline{PD}^2-\overline{BD}^2),$$
$$\overline{BP}^2=\frac{1}{4}(2\overline{AB}^2+2\overline{BC}^2-\overline{AC}^2),$$
$$\overline{DP}^2=\frac{1}{4}(2\overline{CD}^2+2\overline{DA}^2-\overline{AC}^2).$$



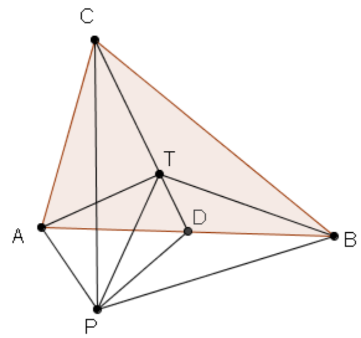

Со замена на второто и третот равенство во првото, по средувањето го добиваме бараното равенство. ■

## 2. ТЕОРЕМА НА ЛАЈБНИЦ

**Теорема 2 (Лајбниц).** Ако $T$ е тежиште на $\triangle ABC$ и $P$ е произволна точка, тогаш

$$\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2=\overline{TA}^2+\overline{TB}^2+\overline{TC}^2+3\overline{PT}^2 .$$

**Доказ.** Нека $D$ е средината на страната $AB$ на $\triangle ABC$. За тежиштето $T$ важи $\overline{CT}:\overline{DT}=2:1$. Со примена на теоремата на Аполониј на триаголниците $BCD, PAB, TAB$ добиваме




$$\overline{PC}^2+2\overline{PD}^2=\overline{TC}^2+2\overline{TD}^2+3\overline{PT}^2$$

$$\overline{PA}^2+\overline{PB}^2=\overline{AD}^2+\overline{BD}^2+2\overline{PD}^2$$

$$\overline{TA}^2+\overline{TB}^2=\overline{AD}^2+\overline{BD}^2+2\overline{TD}^2.$$

Ако ги собереме првите две равенства и го примениме третото равенство, го добиваме бараното равенство. ■

**Задача 5.** Нека $a,b,c$ се должините на страните, $O$ и $r$ се центарот и радиусот на опишата кружнице, а $T$ и $H$ се тежиштето и ортоцентарот на $\triangle ABC$. Докажи дека

а) $\overline{OT}^2=r^2-\frac{1}{9}(a^2+b^2+c^2)$, б) $\overline{OH}^2=9r^2-(a^2+b^2+c^2)$,

в) $\overline{TH}^2=4r^2-\frac{4}{9}(a^2+b^2+c^2)$, г) $\overline{AH}^2+\overline{BH}^2+\overline{CH}^2=12r^2-(a^2+b^2+c^2)$.

**Решение.** а) Според теоремата на Лајбниц добиваме

$\overline{OA}^2+\overline{OB}^2+\overline{OC}^2=\overline{TA}^2+\overline{TB}^2+\overline{TC}^2+3\overline{OT}^2$, т.е. $\overline{OT}^2=r^2-\frac{1}{3}(\overline{TA}^2+\overline{TB}^2+\overline{TC}^2)$.

Сега од задсача 3 в) следува $\overline{OT}^2=r^2-\frac{1}{9}(a^2+b^2+c^2)$.

б) Од теорема на Ојлер следува $\overline{OH}=3\overline{OT}$, па од равенството под а) добиваме $\overline{OH}^2=9r^2-(a^2+b^2+c^2)$.

в) Аналогно како под б) ако искористиме дека $\overline{TH}=2\overline{OT}$, го добиваме бараното равенство.

г) Од теоремата на Лајбниц следува:

$$\overline{AH}^2+\overline{BH}^2+\overline{CH}^2=\overline{AT}^2+\overline{BT}^2+\overline{CT}^2+3\overline{TH}^2.$$

Сега од задача 3 в) и равенството под а) следува бараното равенство. ■

## 3. ТЕОРЕМА НА КАРНО

**Теорема 3 (Карно).** Ако $P,Q,R$ се точки од правите $BC,CA,AB$ на кои припаѓаат страните на $\triangle ABC$, тогаш правите кои минуваат низ точките $P,Q,R$ и се нормални на правите $BC,CA,AB$ се сечат во една точка ако и само ако

$$\overline{BP}^2-\overline{PC}^2+\overline{CQ}^2-\overline{QA}^2+\overline{AR}^2-\overline{RB}^2=0 . \quad (4)$$

**Доказ.** Нека нормалите на страните $BC,CA,AB$ во точките $P,Q,R$ се сечат во точката $O$ (направи цртеж). Тогаш од Питагоровата теорема следува

$$\overline{BP}^2 - \overline{PC}^2 = \overline{BO}^2 - \overline{OC}^2,\ \overline{CQ}^2 - \overline{QA}^2 = \overline{CO}^2 - \overline{OA}^2,\ \overline{AR}^2 - \overline{RB}^2 = \overline{AO}^2 - \overline{OB}^2,$$

Ако ги собереме последните равенства го добиваме равенството (4).

Ќе го докажеме обратното тврдење. Нека $O$ е пресечната точка на нормалите од $P$ и $Q$. Нека подножјето на нормалата од $O$ на правата $AB$ е точката $R_1$. Треба да докажеме дека $R \equiv R_1$. Од веќе докажаното тврдење следува

$$\overline{BP}^2 - \overline{PC}^2 + \overline{CQ}^2 - \overline{QA}^2 + \overline{AR_1}^2 - \overline{R_1B}^2 = 0. \qquad (5)$$

Сега од (4) и (5) добиваме $\overline{AR_1}^2 - \overline{R_1B}^2 = \overline{AR}^2 - \overline{RB}^2$, т.е.

$(\overline{AR_1} - \overline{R_1B})(\overline{AR_1} + \overline{R_1B}) = (\overline{AR} - \overline{RB})(\overline{AR} + \overline{RB})$, т.е. $(\overline{AR_1} - \overline{R_1B})\overline{AB} = (\overline{AR} - \overline{RB})\overline{AB}$.

По кратењето и префрлањето на една страна се добива: $\overline{AR_1} - \overline{R_1B} - \overline{AR} + \overline{RB} = 0$, т.е. $2\overline{RR_1} = 0$, од каде следува $R \equiv R_1$. ■

**Задатак 6.** Докажи дека симетралите на страните на триаголникот се сечат во една точка.

**Решение.** Нека $P, Q, R$ се средините на страните $BC, CA, AB$. Бидејќи симетралите минуваат низ точките $P, Q, R$, тие се норнмални на страните $BC, CA, AB$ и $\overline{BP} = \overline{PC}, \overline{CQ} = \overline{QA}, \overline{AR} = \overline{RB}$, т.е. е исполнето равенството (4), од теоремата на Карно следува дека тие се сечат во една точка. ■

**Задача 7.** Докажи дека правите определени со висините на триаголникот се сечат во една точка.

**Решение.** Нека $P, Q, R$ се подножјата на висините на триаголникот повлечени од темињата $A, B, C$, соодветно. Тогаш точни се следниве равенства:

$$\overline{BP}^2 - \overline{PC}^2 = \overline{AB}^2 - \overline{AC}^2, \overline{CQ}^2 - \overline{QA}^2 = \overline{BC}^2 - \overline{BA}^2, \overline{AR}^2 - \overline{RB}^2 = \overline{CA}^2 - \overline{CB}^2.$$

Ако ги собереме последните равенства добиваме дека е исполнети равенството (4), од каде следува точноста на тврдењето на задачата. ■

## 4. ЗАДАЧИ ЗА САМОСТОЈНА РАБОТА

1. Ако $D$ е точка на страната $BC$ на $\triangle ABC$ таква што $\overline{BD} = 2\overline{DC}$, докажи дека $\overline{AB}^2 + 2\overline{AC}^2 = 3\overline{AD}^2 + 6\overline{CD}^2$.

2. Ако $a, b, c$ се должините на страните, $s$ е полупериметарот и $l_a$ е должината на симетралата на внатрешниот агол во темето $A$ на $\triangle ABC$, докажи дека $l_a = \frac{2\sqrt{bcs(s-a)}}{b+c}$.

3. Ако $H, T, O, S$ се ортоцентарот, тежиштето, центарот на опишаната и центарот на впишаната кружница во $\triangle ABC$, докажи дека $\overline{SH}^2 + 2\overline{SO}^2 = 3(\overline{ST}^2 + 2\overline{OT}^2)$.

4. Ако за $\triangle ABC$ важи $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 5\overline{BC}^2$ докажи дека тежишните линии во темињата $B$ и $C$ се нормални.

5. Докажи дека радиусот на кружницата која ги допира катетите и опишаната кружница на правоаголен триагоилник е еднаков на дијаметарот на впишаната кружница на тој траголник.