

LX олимпијада

1. Определи ги сите функции $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ такви што за секои цели броеви a и b важи

$$f(2a) + 2f(b) = f(f(a+b)). \quad (1)$$

Решение. Со замена во (1) за $a=0, b=x$ добиваме $f(f(x)) = 2f(x) + f(0)$. Според тоа, ако во (1) ставиме $a=1$ добиваме

$$f(2) + 2f(b) = f(f(b+1)) = 2f(b+1) + f(0),$$

т.е.

$$f(b+1) - f(b) = \frac{1}{2}(f(2) - f(0)).$$

Последното значи дека функцијата f е линеарна, т.е. $f(x) = kx + n$, за некои константи k и n . Со замена во (1) добиваме

$$2k(a+b) + 3n = k^2(a+b) + (k+1)n,$$

за секои цели броеви a и b , што е исполнето само за $k=2$ или $k=n=0$. Значи, единствени решенија се функциите $f(x) = 0$ и $f(x) = 2x + n$, за произволен $n \in \mathbb{Z}$.

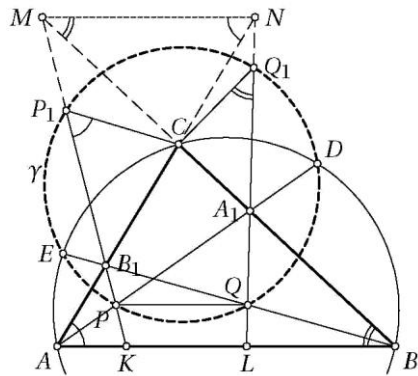
2. Нека ABC е остроаголен триаголник и A_1 и B_1 се точки на страните BC и AC , соодветно. Нека P и Q се точки на отсечките AA_1 и BB_1 , соодветно, такви што правата PQ е паралелна на правата AB . Нека P_1 е точка на правата PB_1 таква што B_1 е меѓу точките P и P_1 и важи $\angle PP_1C = \angle BAC$. Слично, нека Q_1 е точка на правата QA_1 таква што A_1 е меѓу точките Q и Q_1 и важи $\angle CQ_1Q = \angle CBA$.

Докажи дека точките P, Q, P_1 и Q_1 се конциклични.

Решение. Прв начин. Нека правите AA_1 и BB_1 по втор пат ја сечат опишаната кружница околу триаголникот ABC во точките D и E , соодветно. Бидејќи

$$\angle EDP = \angle EDA = \angle EBA = \angle EQP,$$

точките D, E, P и Q припаѓаат на истата кружница γ . Со K да ја означиме пресечната точка на правите PB_1 и AB . Бидејќи $\angle AP_1K = \angle CAK$, четириаголникот AP_1CK е тетивен, па од степенот на точката B_1 добиваме



$$\overline{B_1K} \cdot \overline{B_1P_1} = \overline{B_1A} \cdot \overline{B_1C} = \overline{B_1B} \cdot \overline{B_1E}.$$

Според Талесовата теорема $\overline{B_1P} : \overline{B_1K} = \overline{B_1Q} : \overline{B_1B}$, па оттука следува

$$\overline{B_1P} \cdot \overline{B_1P_1} = \overline{B_1Q} \cdot \overline{B_1E},$$

што значи дека точката P_1 припаѓа на кружницата γ . Аналогно се докажува дека и точката Q_1 припаѓа на кружницата γ , со што доказот е завршен.

Втор начин. Нека правата PB_1 ги сече правите AB и BC соодветно во точките K и M , а правата QA_1 ги сече правите AB и AC соодветно во точките L и N . Од теоремата на Пап за точките A_1, P, A и B_1, B, Q , следува дека точките M и N (кои се двете конечни или бесконечни) и бесконечната точка $AB \cap PQ$ се колинеарни, т.е. $MN \parallel AB \parallel PQ$. Ако точките M и N се конечни, тогаш од $\angle KP_1C = \angle KAC = 180^\circ - \angle MNC$ следува дека точката P_1 лежи на опишаната кружница околу $\triangle MNC$. Аналогно и точката Q_1 лежи на оваа кружница. Сега $\angle PP_1Q_1 = \angle MNQ_1 = 180^\circ - \angle Q_1QP$, па значи четириаголникот PQQ_1P_1 е тетивен.

Ако M и N се бесконечни точки, т.е. $PB_1 \parallel BC$ и $QA_1 \parallel AC$, тогаш точките P_1, C и Q_1 се колинеарни ($\angle P_1CA = \angle P_1KA = \angle CBA$ и $\angle BCQ_1 = \angle BAC$, па затоа $\angle P_1CQ_1 = 180^\circ$), што значи $\angle PP_1Q_1 = \angle PP_1C = \angle BAC = 180^\circ - \angle Q_1QP$, и повторно четириаголникот PQQ_1P_1 е тетивен.

3. Една општествена мрежа има 2019 корисници од кои некои парови се пријатели. Притоа, ако A е пријател на B , тогаш и B е пријател на A . Една по друга може да се случат промени од следниов вид:

Три корисници A, B и C такви што A е пријател и со B и со C , но B и C не се пријатели, ги менуваат статусите на своите пријателства така што сега B и C се пријатели, но A не е пријател ниту со B ниту со C , додека статусите на останатите пријателства не се менуваат.

На почетокот 1010 корисници имаат по 1009 пријателства, а 1009 корисници по 1010 пријателства. Докажи дека постои низа од опишаните промени по која секој корисник има најмногу еден пријател меѓу останатите корисници на мрежата.

Решение. Општествената мрежа претставува граф $\mathbf{G}$ во кој темињата се корисниците, а ребрата се пријателствата. Опишаните промени ќе ги нарекуваме *пресврти*.

Графот $\mathbf{G}$ е сврзан, бидејќи во спротивно темињата во помалата компонента на сврзаност ќе имаат степен помал од 1009. Ќе применуваме пресврти така што ќе останува сврзан граф се додека тоа е можно. Бидејќи со секој пресврт

бројот на ребрата се намалува, овој процес мора да заврши. Така, ни останува граф H кој е сврзан, но кој со секој следен пресврт веќе нема да биде сврзан. Очигледно графот H не е комплетен. Исто така, бидејќи пресвртите не ја менуваат парноста на степените на темињата, а за почетниот граф G не се сите степени парни, заклучуваме дека графот H има темиња со непарен степен, па затоа тој не е цикличен.

- 1) Ако во графот H постојат триаголници, го разгледуваме максималниот комплетен подграф K и да земеме ребро AB такво што $A \in K$ и $B \notin K$. Постои тема $C \in K$ кое не е поврзано со ребро со B . Тогаш по пресвртитот на тројката ABC графот останува сврзан.
- 2) Ако нема триаголници, ама има циклуси, го разгледуваме најмалиот циклус O и ребро AB такво што $A \in O$ и $B \notin O$. Нека $C \in O$ е соседно тема на темето A . Бидејќи ABC не е триаголник, BC не е ребро. И во овој случај по пресвртитот на тројката ABC графот останува сврзан.

Според тоа, во графот H не постојат циклуси, т.е. H е дрво. Бидејќи пресвртите не може да формираат циклуси, понатаму е доволно да правиме пресврти се додека постојат темиња со степен поголем или еднаков на 2. Во графот кој ќе остане на крајот степените на сите темиња ќе бидат 1 или 0.

4. Определи ги сите парови природни броеви (k, n) такви што важи

$$k! = (2^n - 1)(2^n - 2)(2^n - 4) \dots (2^n - 2^{n-1}).$$

Решение. Најголемиот цел број r таков што $2^r \mid k!$ е еднаков на

$$\left[\frac{k}{2}\right] + \left[\frac{k}{2^2}\right] + \left[\frac{k}{2^3}\right] + \dots < k.$$

Бидејќи бројот $(2^n - 1)(2^n - 2)(2^n - 4) \dots (2^n - 2^{n-1})$ е делив со $2^{\frac{n(n-1)}{2}}$, добиваме $k > \frac{n(n-1)}{2}$. Според тоа,

$$2^{n^2} > f(n) = k! > \left(\frac{n(n-1)}{2}\right)!.$$

Меѓутоа, за $n \geq 6$ ова неравенство не важи. Навистина, за $n = 6$ имаме $15! > 2^{36}$, додека за $n > 6$ имаме

$$\left(\frac{n(n-1)}{2}\right)! > 15! \cdot 16^{\frac{n(n-1)}{2} - 15} > 2^{36} \cdot 2^{2n(n-1) - 60} = 2^{2n^2 - 2n - 24} > 2^{n^2},$$

бидејќи $n^2 - 2n - 24 > 0$.

Конечно, бидејќи $f(3) = 168$, $f(4) = \frac{1}{4} \cdot 8!$ и $31 \mid f(5) < 31!$, ниту во овие случаи нема решение, па затоа единствени решенија се $(k, n) \in \{(1, 1), \{3, 2\}\}$.

5. Банката на градот Бата издава монети кои од едната страна имаат ознака H , а од другата ознака T . Хари наредил n вакви монети во низа од лево на

десно. Со овие монети тој ја повторува следнава операција: ако во низата има точно $k > 0$ монети кои покажуваат H , тогаш тој ја превртува k -тата монета од лево, а во спротивно сите монети покажуваат T и постапката завршува. На пример, ако $n = 3$ и почетниот распоред е THT , Хари ја извршува низата операции $THT \rightarrow HHT \rightarrow HTT \rightarrow TTT$ и постапката завршува по овие три операции.

а) Докажи дека за секој почетен распоред на монетите Хари ја завршува опишаната постапка по конечно многу операции.

б) За почетен распоред C , нека со $L(C)$ е означен бројот на операциите кои Хари ги извршува пред постапката да заврши. На пример, $L(THT) = 3$ и $L(TTT) = 0$. Определи ја аритметичката средина на броевите $L(C)$ по сите 2^n можни почетни распореди C .

Решение. *Прв начин.* Нека $l(n)$ е аритметичката средина на $L(C)$ по сите распореди на n монети. Имаме $l(0) = 0$ и $l(1) = 1$. Тврдењето под а) ќе го докажеме ако докажеме дека $l(n)$ е конечен број.

Со $f(c)$ да го означиме распоредот кој се добива од распоредот $c = a_1 a_2 \dots a_n$ по една операција. Исто така воведуваме ознака $\bar{c} = \overline{a_1 a_2 \dots a_n}$, каде $\bar{H} = T$ и $\bar{T} = H$.

1) За произволен распоред на n монети важи $f(cT) = f(c)T$. Според тоа, аритметичката средина на $L(cT)$ е еднаква на $l(n)$.

2) Од друга страна $f(\bar{c}H) = \overline{f(c)H}$. Навистина, ако точно k монети во распоредот покажува H , тогаш $f(c)$ се разликува од c само во $(n-1-k)$ -тата позиција, па $\overline{f(c)H}$ се разликува од $\bar{c}H$ само во $(k+1)$ -та позиција, т.е. се совпаѓа со $f(\bar{c}H)$.

Од распоредот $\bar{c}H$ по $L(c)$ операции се добива распоредот $HH \dots HH$, од кој потоа со $n+1$ операција се добива распоредот $TT \dots TT$. Според тоа аритметичката средина на броевите $L(cH)$ е еднаква на $l(n) + n + 1$.

Значи, точна е формулата $l(n+1) = l(n) + \frac{n+1}{2}$, од каде со индукција се добива дека $l(n) = \frac{n(n+1)}{4}$.

Втор начин. За распоред на n монети $C = a_1 a_2 \dots a_n$ со $\tau(C)$ да го означиме бројот на монетите кои покажуваат H , а со $\sigma(C)$ збирот на позициите i на кои $a_i = H$. На пример, $\tau(HHTTH) = 3$ и $\sigma(HHTTH) = 1 + 2 + 5 = 8$.

Нека со операцијата од распоредот C се добива распоредот C' . Тогаш

$$\tau(C') = \tau(C) \pm 1 \text{ и } \sigma(C') = \sigma(C) \pm \tau(C),$$

во зависност од тоа дали на позицијата $\tau(C)$ е T или H . Во двата случаја важи

$$\lambda(C') = \lambda(C) - 1, \text{ каде } \lambda(C) = 2\sigma(C) - \tau(C)^2.$$

Бидејќи

$$\lambda(C) \geq 2(1 + 2 + \dots + \tau(C)) - \tau(C)^2 \geq 0,$$

за секој распоред C , следува дека $L(C) = \lambda(C)$ е секогаш конечен.

Аритметичката средина на $\sigma(C)$ е еднаква на $\frac{1}{2}(1 + 2 + \dots + n) = \frac{n(n+1)}{4}$, бидејќи за секој i монетата на i -тото место покажува H точно во половината случаи. Аритметичката средина на $\tau(C)^2$ е:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2^n} \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \cdot i^2 &= \frac{1}{2^n} \sum_{i=0}^n \frac{i^2 n!}{i!(n-i)!} = \frac{n}{2^n} \sum_{i=1}^n i \binom{n-1}{i-1} = \frac{n}{2^n} \sum_{i=1}^n (n-i+1) \binom{n-1}{i-1} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{n}{2^n} \sum_{i=1}^n (n+1) \binom{n-1}{i-1} = \frac{n(n+1)}{2^{n+1}} \cdot 2^{n-1} = \frac{n(n+1)}{4}. \end{aligned}$$

Според тоа, аритметичката средина на броевите $L(C)$ по сите 2^n можни почетни распореди C е еднаква на $2 \cdot \frac{n(n+1)}{4} - \frac{n(n+1)}{4} = \frac{n(n+1)}{4}$.

6. Нека I е центар на впишаната кружница ω на остроаголниот триаголник ABC во кој $\overline{AB} \neq \overline{AC}$. Кружницата ω ги допира страните BC, CA, AB во точките D, E, F , соодветно. Правата која ја содржи D и е нормална на EF повторно ја сече кружницата ω во точката R . Правата AR повторно ја сече кружницата ω во точката P . Кружниците опишани околу триаголниците PCE и PBF повторно се сечат во точката Q .

Докажи дека правите DI и PQ се сечат на правата која ја содржи точката A и е нормална на AI .

Решение. *Прв начин.* Нека нормалата во A на AI ја сече правата DI во точката S . Од $AI \parallel RD \perp EF$ следува

$$\angle PDS = 90^\circ - \angle BDP = 90^\circ - \angle DRP = 90^\circ - \angle IAP = 180^\circ - \angle SAP,$$

што значи дека четириаголникот $APDS$ е тетивен. Понатаму,

$$\begin{aligned} \angle BQC &= \angle BQP + \angle PQC = \angle BFP + \angle PEC = \angle FEP + \angle PEC \\ &= \angle FEC = 90^\circ + \frac{1}{2} \angle A = \angle BIC, \end{aligned}$$

па затоа и четириаголникот $BQIC$ е тетивен.

Нека правата PS по вторпат ја сече впишаната кружница во точката K . Тогаш важи $\angle EDS = \angle RDF$ и $\angle SDA = \angle SPA = \angle KPR = \angle KDR$, т.е. DA и DK се симетрични во однос на симетралата на $\angle EDF$, па како е DA симе-

дијана во $\triangle DEF$, заклучуваме дека правата DK ја содржи средината A' на отсечката EF .

Од $\triangle APE \sim \triangle AER$ и $\triangle APF \sim \triangle AFR$ следува

$$\frac{RF}{FP} = \frac{AF}{AP} = \frac{AE}{AP} = \frac{RE}{EP},$$

т.е. четириаголникот $FREP$ е хармониски. Во сличноста $\triangle FRE \sim \triangle BCI$ на точката P и соодветствува точка L таква што $FREP \sim BICL$. Тогаш

$$\frac{IB}{BL} = \frac{IC}{CL}.$$

Бидејќи

$$\begin{aligned} \angle PQB &= \angle PFB = \angle PEF \\ &= \angle LCB = \angle LQB, \end{aligned}$$

точката Q лежи на правата PL . Останува да докажеме дека точките L, P и K се колинеарни.

При инверзија во однос на впишаната кружница точките D, E, F, K се фиксни, точките A, B, C се пресликуваат соодветно во средините A', B', C' на отсечките EF, DF, DE , а L се пресликува во точка L' таква што $\frac{IL'}{L'B'} =$

$$\frac{IB}{BL} = \frac{IC}{CL} = \frac{IL'}{L'C'},$$

па затоа $L'B' = L'C'$, т.е. L' е средина на отсечката $B'C'$.

Според тоа, точките D, L', A', K се колинеарни, што значи дека точките D, L, A, K лежат на кружница која минува низ точката I , т.е. петаголникот $AKIDL$ е тетивен. Сега, од сличноста $FREP \sim BICL$ следува

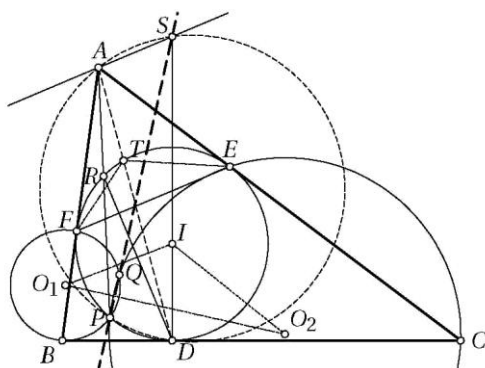
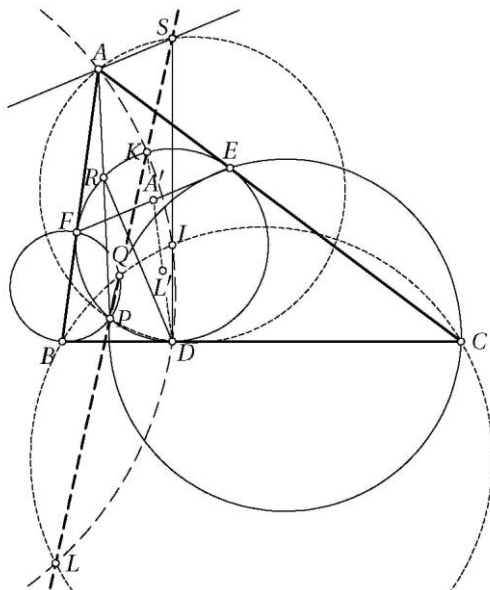
$$\angle LKD = \angle LID = \angle PRD = \angle PKD,$$

т.е. L лежи на правата PK , со што доказот е завршен.

Втор начин. Пресечната точка S на правата DI и нормалата на AI во A припаѓа на кружницата APD бидејќи

$$\begin{aligned} \angle PDS &= 90^\circ - \angle BDP \\ &= 90^\circ - \angle DRP \\ &= 90^\circ - \angle IAP \\ &= 180^\circ - \angle SAP. \end{aligned}$$

Нека правата AD ја сече впишаната кружница во точката



$T \neq D$. Од $\triangle ATE \sim \triangle AED$ и $\triangle ATF \sim \triangle AFD$ следува $\frac{\overline{ET}}{\overline{ED}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{AF}}{\overline{FD}} = \frac{\overline{FT}}{\overline{FD}}$, т.е.

$\frac{\overline{ET}}{\overline{FT}} = \frac{\overline{ED}}{\overline{FD}}$. На сличен начин се добива $\frac{\overline{EP}}{\overline{FP}} = \frac{\overline{ER}}{\overline{FR}}$. Со O_1 и O_2 да ги означиме

центрите на опишаните кружности на триаголниците BPF и CPE , соодветно. Тогаш важи $O_1I \perp FP$, $O_2I \perp EP$ и $O_1O_2 \perp PQ$. Бидејќи

$$\angle PO_1B = 2\angle PFB = 2\angle PEF = \angle PIF,$$

триаголниците PO_1B и PIF се ротационо хомотетични, од каде што следува $\triangle PO_1B \sim \triangle PBF$. Слично важи $\triangle PO_2I \sim \triangle PCE$. Од овие две сличности имаме

$$\overline{O_1I} = \overline{BF} \cdot \frac{\overline{IP}}{\overline{FP}} \text{ и } \overline{O_2I} = \overline{CE} \cdot \frac{\overline{IP}}{\overline{EP}}, \text{ па е } \frac{\overline{O_1I}}{\overline{O_2I}} = \frac{\overline{BF}}{\overline{CE}} \cdot \frac{\overline{EP}}{\overline{FP}}.$$

$$\frac{\overline{EP}}{\overline{FP}} = \frac{\overline{ER}}{\overline{FR}} = \frac{\sin \angle EFR}{\sin \angle FER} = \frac{\cos \angle DEF}{\cos \angle DFE} = \frac{\cos \angle DFB}{\cos \angle DEC},$$

следува

$$\frac{\overline{O_1I}}{\overline{O_2I}} = \frac{\overline{BF}}{\overline{CE}} \cdot \frac{\cos \angle DFB}{\cos \angle DEC} = \frac{\overline{FD}}{\overline{ED}} = \frac{\overline{FT}}{\overline{ET}}.$$

Притоа важи $\angle O_1IO_2 = 180^\circ - \angle EPF = \angle FTE$, па затоа $\triangle O_1IO_2 \sim \triangle FTE$.

Сега имаме

$$\angle EPQ = \angle IO_2O_1 = \angle TEF = \angle ADF = \angle SDF - \angle SDA = \angle EPR - \angle SPA = \angle EPS,$$

па затоа точките P, Q и S се колинеарни.