Билјана Јошевска Јованчева,
Скопје

ФУНКЦИОНАЛНИ РАВЕНКИ

Функционалните равенки се дел од математичката разноликост и истите се природна врска на алгебрата и математичката анализа. Тие се одликуваат со разнообразност на идеите за нивно решавање, отсуството на шаблони и поврзувањето на поимите меѓу елементарната и вишата математика. Во ова статија ќе разгледаме неколку елементарни функционални равенки во множеството реални броеви.

Задача 1. Најди ги сите функции $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ такви да важи

$$f(xy) = xf(y) + f(x), \text{ за секои } x, y \in \mathbf{R}. \quad (1)$$

Решение. Ако во (1) ставиме $y=0$ добиваме $f(x)=f(0)-xf(0)$. Нека $a=f(0)$. Тогаш $f(x)=a-ax$. Непосредно се проверува дека овие функции се решенија на функционалната равнка (1) за секој $a\in\mathbf{R}$. ■

Задача 2. Нека $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ и нека $f(x+y)=f(xy)$, за секои $x,y\in\mathbf{R}$. Ако $f(-\frac{1}{2})=-\frac{1}{2}$, пресметај $f(2014)$.

Решение. Од условот на задачата следува

$$f(x)=f(x+0)=f(x\cdot 0)=f(0).$$

Ако во последната равенка ставиме $x=-\frac{1}{2}$ добиваме $f(0)=f(-\frac{1}{2})=-\frac{1}{2}$, па затоа $f(x)=f(0)=-\frac{1}{2}$. Конечно, за $x=2014$ имаме $f(2014)=-\frac{1}{2}$. ■

Задача 3. Најди ги сите функции $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ такви да важи

$$(f(x))^2 + f(x)f(y) = x^2 + xy, \text{ за секои } x, y \in \mathbf{R}. \quad (2)$$

Решение. За $x=y=1$ од (2) добиваме $2(f(1))^2=2$, па затоа $f(1)=1$ или $f(1)=-1$. Ако сега во (2) ставиме $x=1$ наоѓаме $f(y)=y$ или $f(y)=-y$, за секој $y\in\mathbf{R}$. Непосредно се проверува дека функциите $f(x)=x$ и $f(x)=-x$ се решенија на равенката (1). ■

Задача 4. Најди ги сите функции $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ такви да важи

$$f(x)f(y) - f(xy) = x + y, \text{ за секои } x, y \in \mathbf{R}. \quad (3)$$

Решение. Нека $y=0$. Со замена во (3) добиваме

$$f(0)(f(x)-1)=x \text{, за секој } x\in\mathbf{R}. \qquad (4)$$

Од последната равенка следува дека $f(0)\neq 0$, бидејќи во спротивно левата страна на (4) би била еднаква на 0, а десната страна е произволен реален број, што не е можно. Сега, од (4) добиваме $f(x)=\frac{x}{f(0)}+1$. Ако во последната равенка ставиме $x=0$ добиваме $f(0)=1$, што значи дека единствено решение на дадената равенка е $f(x)=x+1$. ■

Задача 5. Најди ги сите функции $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ такви да важи

$$f(x+y)+2f(x-y)+f(x)+2f(y)=4x+y \text{, за секои } x,y\in\mathbf{R}. \qquad (5)$$

Решение. Ако во (5) ставиме $y=0$ добиваме $4f(x)+2f(0)=4x$. Земаме $f(0)=a$ и добиваме $f(x)=x-\frac{a}{2}$. Понатаму, со замена во равенката (5) добиваме

$$x+y-\frac{a}{2}+2(x-y-\frac{a}{2})+x-\frac{a}{2}+2(y-\frac{a}{2})=4x+y,$$

од каде наоѓаме $a=0$. Според тоа, единствено решение на равенката (5) е функцијата $f(x)=x$. ■

Задача 6. Најди ги сите функции $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ такви да важи

$$f(xy)=\frac{f(x)+f(y)}{x+y} \text{, за секои } x,y\in\mathbf{R} \text{ такви што } x+y\neq 0.$$

Решение. За $y=1, x\neq -1$ имаме

$$f(x)=\frac{f(x)+f(1)}{x+1} \text{, т.е. } xf(x)=f(1).$$

Ако во последната равенка ставиме $x=0$ добиваме $f(1)=0$. Значи, за $x\neq 0, x\neq -1$ имаме $f(x)=0$. Сега, бидејќи $f(2)=0$, ако во дадената равенка ставиме $y=0, x=2$ добиваме

$$f(0)=\frac{f(2)+f(0)}{2} \text{, т.е. } f(0)=f(2)=0.$$

Конечно, ако во дадената равенка ставиме $y=0, x=-1$, добиваме

$$f(0)=\frac{f(-1)+f(0)}{-1} \text{, т.е. } f(-1)=-2f(0)=0.$$

Значи, $f(x)=0$, за секој $x\in\mathbf{R}$. ■

Непозната функција може да се определи и во случај кога имаме дадено неравенства кои функцијата треба да ги задоволува, како што е тоа во следниов пример.

Задача 7. За функцијата $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ важи

1) $f(x)\le x$, за секој $x\in\mathbf{R}$ и

2) $f(x+y)\le f(x)+f(y)$, за секои $x,y\in\mathbf{R}$.

Докажи дека $f(x)=x$, за секој $x\in\mathbf{R}$.

Решение. Од $f(0+0)\le f(0)+f(0)$ следува $2f(0)\ge f(0)$, т.е. $f(0)\ge 0$. Понатаму, од $f(x+(-x))\le f(x)+f(-x)$ добиваме

$$f(x)\ge f(0)-f(-x)\ge 0-f(-x)\ge -(-x)=x,$$

што заедно со условот 1) дава $f(x)=x$. ■

ЗАДАЧИ ЗА САМОСТОЈНА РАБОТА

1. Најди ги сите функции $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ такви да важи

$$f(x+y)+f(x-y)-f(x)-x^3-6xy\sqrt[3]{f(y)}=0, \text{ за секои } x,y\in\mathbf{R}.$$

2. Најди ги сите функции $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ такви да важи

$$xf(y)+yf(x)=(x+y)f(x)f(y), \text{ за секои } x,y\in\mathbf{R}.$$