VIII олимпијада

1. На една олимпијада биле дадени три задачи A, B и C. Дваесет и пет учесници на натпреварот решиле барем една задача. Учесниците кои ја решиле задачата B, а не ја решиле задачата A, биле два пати повеќе од оние кои ја решиле задачата C, а не ја решиле задачата A. Учесниците кои ја решиле само задачата A, биле за еден повеќе од оние кои покрај задачата A, решиле и уште некоја друга задача. Половина од учениците кои решиле една задача, ја решиле само задачата A. Колку ученици ја решиле само задачата B.

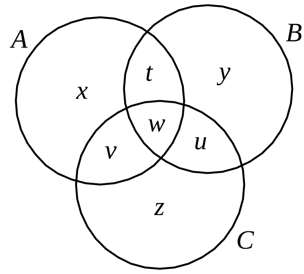
Решение. Нека x, y, z е бројот на ученици кои ја решиле само задачата A, B, C соодветно; t, u, v е бројот на ученици кои ги решиле само задачите A и B, B и C, A и C, соодветно, и нека w е бројот на ученици кои ги решиле сите три задачи. Имаме:

$$x+y+z+t+u+v+w=25 \qquad (1)$$

$$y+u=2(z+u) \qquad (2)$$

$$x-1=t+v+w \qquad (3)$$

$$x+y+z=2(y+z) \qquad (4)$$



Црт. 8.1.

Јасно, $x, y, z, t, u, v, w \in \mathbb{N}$. Од (1) и (3) следува

$$2x+y+z+u=26, \qquad (5)$$

а од (2) и (4) се добива

$$y-2z-u=0 \qquad (2')$$

$$-x+y+z=0 \qquad (4')$$

Сега од (5) , (2') и (4') добиваме

$$z=26-4y \qquad (6)$$

$$u=y-2(26-4y)=9y-52 \qquad (7)$$

Бидејќи y, z и u се природни броеви, од (6) добиваме $y \leq 6$, а од (7) добиваме $y \geq 6$. Значи, ако постои решение, тогаш $y=6$.

Решение постои, на пример: $x=8, y=6, z=2, t=3, u=2, v=2, w=2.$

2. Ако a, b, c се должините на страните, а α, β, γ се аглите наспроти страните на триаголникот. Докажи дека, ако $a+b=\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}(a\operatorname{tg}\alpha+b\operatorname{tg}\beta)$, тогаш триаголникот е рамнокрак.

Решение. Ако α, β, γ се аглите на триаголникот, тогаш

$$\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}=\operatorname{ctg}\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}},$$

што значи дка даденото равенство е еквивалентно на равенството

$$a(1-\operatorname{tg}\alpha\frac{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}})+b(1-\operatorname{tg}\beta\frac{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}})=0\,.$$

Ако последното равенство го помножиме со $\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\alpha\cos\beta$, добиваме

$$a\cos\beta(\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\alpha-\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\alpha)+b\cos\alpha(\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\beta-\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\beta)=0\,.$$

Последното равенство е еквивалентно на равенството

$$\sin\frac{\alpha-\beta}{2}(a\cos\beta-b\cos\alpha)=0\,.$$

Значи, $\sin\frac{\alpha-\beta}{2}=0$, т.е. $\alpha=\beta$, па триаголникот е рамнокрак, или

$$a\cos\beta=b\cos\alpha\,.$$

Од синусната теорема имаме

$$a\sin\beta=b\sin\alpha\,,$$

па ако ги квадрираме последните две равенства и ги собиреме добиваме

$$a^2(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)=b^2(\cos^2\beta+\sin^2\beta)\,,$$

од што следува $a=b$ т.е. триаголникот е рамнокрак.

3. Докажи дека збирот на растојанијата од центарот на сферата опишана околу правилен тетраедар до неговите темиња е помал од збирот на растојанијата од било која друга точка до темињата на тетраедарот.

Решение. Поставуваме координатен систем $Oxyz$ така што врвовите на тетраедарот, за некој $a>0$ се точките $A(-a,-a,-a)$, $B(a,a,-a)$, $C(a,-a,a)$ и $D(-a,a,a)$. (Лесно се проверува дека $\overline{AB}=\overline{AC}=\overline{AD}=\overline{BC}=\overline{BD}=\overline{DC}$). Збирот на растојанијата од точка (x,y,z) до темињата A, B, C, D е

$$\begin{aligned}f(x,y,z)=&\sqrt{(x+a)^2+(y+a)^2+(z+a)^2}\\&+\sqrt{(x-a)^2+(y-a)^2+(z+a)^2}\\&+\sqrt{(x-a)^2+(y+a)^2+(z-a)^2}\\&+\sqrt{(x+a)^2+(y-a)^2+(z-a)^2}\,.\end{aligned}$$

Од неравенството меѓу квадратната и аритметичката средина следува

$$\begin{aligned}f(x,y,z)\geq&\tfrac{1}{\sqrt{3}}[(x+a)+(y+a)+(z+a)+(a-x)+(a-y)+(a+z)\\&+(a-x)+(a+y)+(a-z)+(a+x)+(a-y)+(a-z)]=4a\sqrt{3}\end{aligned}$$

Равенство важи ако и само ако $x=y=z=0$, т.е. ако и само ако точката (x,y,z) е центар на опишаната сфера околу тетраедарот.

4. Нека $n\in\mathbb{N}$ и $x\neq\frac{\lambda\pi}{2^k}$, каде $k\in\mathbb{N}_0$, $\lambda\in\mathbb{Z}$. Докажи дека

$$\frac{1}{\sin 2x}+\frac{1}{\sin 4x}+...+\frac{1}{\sin 2^n x}=\text{ctg}x-\text{ctg}2^n x\ .$$

Решение. Од $x\neq\frac{\lambda\pi}{2^k}$, $\lambda\in\mathbb{Z}$, $k\in\mathbb{N}_0$ следува $\sin 2^k x\neq 0$ и затоа постојат и $\text{ctg}2^k x$ и $\text{ctg}2^{k-1}x$. Според тоа, можеме да го користиме идентитетот

$$\text{ctg}\alpha-\text{ctg}2\alpha=\frac{1}{\sin 2\alpha}\ .$$

Равенството ќе го докажеме со математичка индукција. За $n=1$, тоа очигледно важи. Нека претпоставиме дека тоа важи за $n=m$, т.е.

$$\frac{1}{\sin 2x}+\frac{1}{\sin 4x}+\frac{1}{\sin 6x}+...+\frac{1}{\sin 2^m x}=\text{ctg}x-\text{ctg}2^m x\ .$$

Тогаш, за $n=m+1$ имаме

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sin 2x}+\frac{1}{\sin 4x}+...+\frac{1}{\sin 2^m x}+\frac{1}{\sin 2^{m+1}x}&=(\text{ctg}x-\text{ctg}2^m x)+(\text{ctg}2^m x-\text{ctg}2^{m+1}x)\\&=\text{ctg}x-\text{ctg}2^{m+1}x,\end{aligned}$$

што значи дека равенството важи и за $n=m+1$. Конечно, од принципот на математичка индукција следува дека равенството важи за секој $n\in\mathbb{N}$.

5. Реши го системот равенки

$$\begin{aligned}|a_1-a_2|x_2+|a_1-a_3|x_3+|a_1-a_4|x_4&=1\\|a_2-a_1|x_1+|a_2-a_3|x_3+|a_2-a_4|x_4&=1\\|a_3-a_1|x_1+|a_3-a_2|x_2+|a_3-a_4|x_4&=1\\|a_4-a_1|x_1+|a_4-a_2|x_2+|a_4-a_3|x_4&=1\end{aligned}$$

каде a_1,a_2,a_3,a_4 се дадени реални броеви такви што $a_i\neq a_j$, за $i\neq j$.

Решение. Ако кои било два различни индекси $i,j\in\{1,2,3,4\}$ си ги сменат местата системот не го менува обликот. Затоа можеме да претпоставиме дека $a_1>a_2>a_3>a_4$. Тогаш

$$\begin{aligned}(a_1-a_2)x_2+(a_1-a_3)x_3+(a_1-a_4)x_4&=1\\(a_1-a_2)x_1+(a_2-a_3)x_3+(a_2-a_4)x_4&=1\\(a_1-a_3)x_1+(a_2-a_3)x_2+(a_3-a_4)x_4&=1\\(a_1-a_4)x_1+(a_2-a_4)x_2+(a_3-a_4)x_3&=1\end{aligned}$$

Ако од втората равенка ја одземеме првата, од третата ја одземеме втората и од четвртата равенка ја одземеме третата добиваме

$$\begin{aligned}(a_1-a_2)(-x_1+x_2+x_3+x_4)&=0,\\(a_2-a_3)(-x_1-x_2+x_3+x_4)&=0,\\(a_3-a_4)(-x_1-x_2-x_3+x_4)&=0.\end{aligned}$$

Дадениот систем е еквивалентен на системот:

$$x_1=x_2+x_3+x_4\ ,$$

$$x_1 + x_2 = x_3 + x_4\,,$$
$$x_1 + x_2 + x_3 = x_4\,,$$
$$(a_1 - a_4)x_1 + (a_2 - a_4)x_2 + (a_3 - a_4)x_3 = 1\,.$$

Од првите три равенки добиваме $x_2 = x_3 = 0$ и $x_1 = x_4$. Од последната равенка добиваме $x_1 = \frac{1}{a_1 - a_4}$.

6. Нека M, K, L се точки од страните AB, BC, CA од $\triangle ABC$, соодветно, такви што ниту една од нив не е негово теме. Докажи дека плоштината на барем еден од триаголниците AML, BKM, CLK не е поголема од $\frac{1}{4}$ од плоштината на $\triangle ABC$.

Решение. Нека $\overline{AM} : \overline{AB} = x$, $\overline{BK} : \overline{BC} = y$, $\overline{CL} : \overline{CA} = z$. Тогаш,

$$P_{AML} \cdot P_{BKM} \cdot P_{CLK} = \tfrac{1}{8}\overline{AB}^2\,\overline{AC}^2\,\overline{BC}^2 x(1-x)y(1-y)z(1-z)\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$$
$$\leq \tfrac{1}{8}(\tfrac{1}{4})^3\,\overline{AB}^2\,\overline{AC}^2\,\overline{BC}^2 \sin\alpha\sin\beta\sin\gamma = (\tfrac{P}{4})^3$$

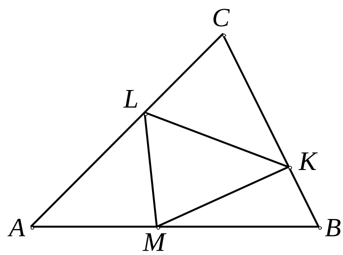
Значи,

$$\frac{4P_{AML}}{P} \cdot \frac{4P_{BKM}}{P} \cdot \frac{4P_{AML}}{P} \leq 1$$

па затоа барем еден од множителите од левата страна не е поголем од 1.

Во доказот е користено неравенството

$$\lambda(1-\lambda) \leq \tfrac{1}{4} \text{ за } 0 < \lambda < 1.$$



Црт. 8.2.