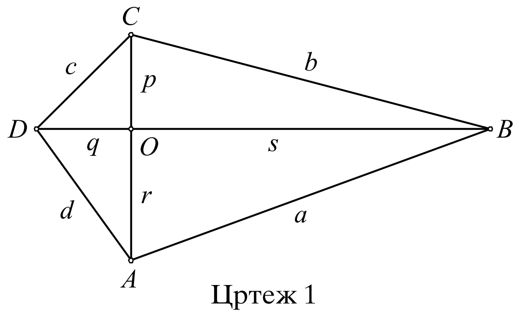
Jens Carstensen и Алија Муминагиќ, Данска

ЕДЕН ИНТЕРЕСЕН ЧЕТИРИАГОЛНИК

Ќе го разгледаме четириаголникот $ABCD$ во кој $AB = a = 325$, $BC = b = 313$, $CD = c = 65$, $DA = d = 109$, $AC = e = 116$, $BD = f = 372$ (цртеж 1).

Воочуваме дека должините на страните и дијагоналите се природни броеви. Да се потсетиме на следната **теорема:**

Теорема. Ако во четириаголникот $ABCD$, $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$, тогаш $e \perp f$.



Цртеж 1

Доказ: За четириаголникот $ABCD$ воведуваме ознаки $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$, $AC = e$, $BD = f$, $AC \cap BD = \{O\}$, $CO = p$, $AO = r$, $BO = s$, $DO = q$, $\angle DOC = \varphi$ (цртеж 2).

Со примена на косинусната теорема на триаголниците ΔABO и ΔCDO добиваме:

$$a^2 = s^2 + r^2 - 2sr\cos\varphi \qquad (1)$$

и

$$c^2 = p^2 + q^2 - 2pq\cos\varphi \qquad (2)$$

Со собирање на равенствата (1) и (2) добиваме

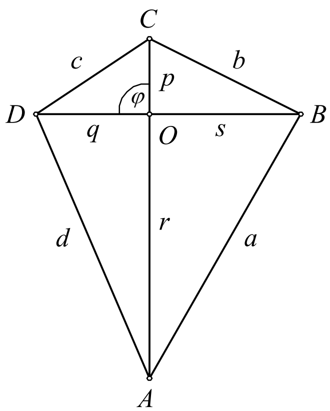
$$a^2 + c^2 = s^2 + r^2 + p^2 + q^2 - 2\cos\varphi(sr + pq) \qquad (3)$$

Од косинусната теорема, применета на триаголниците ΔBCO и ΔDAO добиваме:

$$b^2 = p^2 + s^2 - 2ps\cos(180^\circ - \varphi) \qquad (4)$$

и

$$d^2 = r^2 + q^2 - 2rq\cos(180^\circ - \varphi) \qquad (5)$$



Цртеж 2

Со собирање на равенствата (4) и (5) добиваме

$$b^2 + d^2 = p^2 + s^2 + r^2 + q^2 + 2\cos\varphi(ps + rq) \qquad (6)$$

(објасни!)

Од равенството $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$, и равенствата (3) и (6) добиваме

$$-2\cos\varphi(sr + pq) = 2\cos\varphi(ps + rq) \Leftrightarrow \cos\varphi(ps + rq + sr + pq) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\cos\varphi[p(s+q) + r(s+q)] = 0 \Leftrightarrow (s+q)(p+r)\cos\varphi = 0$$

Бидејќи $s + q \neq 0$ и $p + r \neq 0$ следи $\cos\varphi = 0$, т.е. $\varphi = 90^\circ$. ■

Во конкретниот случај имаме $325^2 + 65^2 = 313^2 + 109^2$. Значи, $e \perp f$.

Нека и на цртежот 1, $AC \cap BD = \{O\}$.

Триаголниците ΔAOB, ΔBOC, ΔCOD и ΔDOA се правоаголни триаголници. Ќе покажеме дека тие се Питагорини триаголници.

Нека $CO = p$, $AO = r$, $BO = s$ и $DO = q$ (цртеж 1). Ако ја искористиме Хероновата формула за да ја пресметаме површина на триаголникот ΔBCD, добиваме:

$$P_{\Delta}(BCD) = \sqrt{375\,(375-372)\,(375-313)\,(375-65)}$$
$$= \sqrt{375 \cdot 3 \cdot 62 \cdot 310} = \sqrt{(5 \cdot 15 \cdot 62)^2} = 4650.$$

Од друга страна $P_{\Delta}(BCD) = \frac{1}{2} f \cdot p$, па според тоа

$$p = \frac{2 \cdot P_{\Delta}(BCD)}{f} = \frac{2 \cdot 4650}{372} = 25.$$

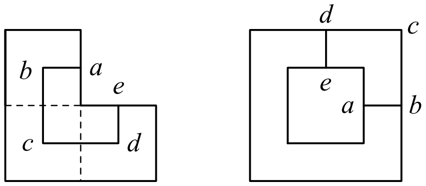
Од равенството $p + r = e$, каде $e = 116$, а $p = 25$ добиваме $r = 91$.

На сличен начин ги добиваме $q = 60$ и $s = 312$.

Значи, триаголниците COD, COB, DOA и AOB се со должини на страни $(25, 60, 65)$, $(25, 312, 313)$, $(60, 91, 109)$ и $(91, 312, 325)$ соодветно и се Питагорини триаголници. ▪

Рамка за слика

Одговор. Решението е како на сликата.



а) б)

Состави шаховска табла

Одговор. Може.
Решението е дадено на сликата.