ПОВЕЌЕ НАЧИНИ ЗА РЕШАВАЊЕ НА ЕДНА ЗАДАЧА

Во комбинаториката најчесто една иста задача може да се реши на повеќе начини. Притоа некои од начините за решавање на определен проблем се елементарни, а во некои се користат напредни знаења како што се генераторните функции и рекурзиите. Во нашите разгледувања ќе се осврнеме на една елементарна задача, за која ќе презентираме шест начини за нејзино решавање.

Задача. Нека n е даден природен број. Определи го бројот на природните броеви кои се помали од 10^n и во чиј декаден запис се содржи цифрата 5.

Решение. Нека $A=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ и $B=\{0,1,2,3,4,6,7,8,9\}$, т.е. A е множеството од сите цифри, а B е множеството цифри во кои не се содржи цифрата 5. Понатаму, на броевите кои имаат $k<n$ цифри од лево ќе им допишеме $n-k$ нули и така броевите кои се помали од 10^n (вклќиучувајќи ја и нулата) ги сведовме на подредени $n-$торки од елементи на множеството A, т.е. на варијациии со повторување од 10 елементи од класа n. Бараниот број броеви да го означиме со x_n.

Прв начин. Бројот на природните броеви кои се помали од 10^n (вкулучвајќи ја и нулата) е еднаков на бројот на варијациите со повторување од елементите на множеството $A(|A|=10)$ од класа n, т.е. е еднаков на 10^n. Бројот на природните броеви кои се помали од 10^n (вклучувајќи ја и нулата) и кои во својот запис не ја содржат цифрата 5 е еднаков на бројот на варијациите со повторување од елементите на множеството $B(|B|=9)$ од класа n, т.е. е еднаков на 9^n. Значи, бројот на броевите кои се помали од 10^n и во чиј запис се содржи цифрата 5 е еднаков на 10^n-9^n.

Втор начин. Броевите кои во записот k пати ја имаат цифрата 5 ги добиваме така што од n места ќе избереме k места на кои ќе ја запишеме цифрата 5, а на останатите $n-k$ цифри произволно ги запишуваме останатите цифри. Според тоа, нивниот број е еднаков на $\binom{n}{k}\cdot 9^{n-k}$, бидејќи секоја од останатите $n-k$ произволно ја избираме од множеството B кое има 9 елементи. Бидејќи во бараните броеви цифрата 5 може да се јавува $1,2,3,\dots,n$ пати и настаните се дисјунктни од принципот на збир и од Њутновата биномна формула следува

$$x_n=\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\cdot 9^{n-k}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot 9^{n-k}-9^n=(9+1)^n-9^n=10^n-9^n.$$

Трет начин. Ако првата цифра од лево е 5, тогаш на останатите места може да е било која цифра од $A(|A|=10)$, па такви броеви има 10^{n-1}. Ако цифрата 5 прв пат се јавува на второт место од лево, тогаш првата цифра од лево може да биде било која цифра од множеството $B(|B|=9)$, а на останатите $n-2$ места било која цифра од множеството $A(|A|=10)$, па такви броеви има $9\cdot 10^{n-2}$ итн. ако цифрата 5 прв пат се јавува на $k-$тото место, тогаш на првите $k-1$ место може да биде било која цифра од множеството $B(|B|=9)$, а на останатите $n-k$ места може да биде било која цифра од множеството $A\,(|A|=10)$, па такви броеви има $9^{k-1}\cdot 10^{n-k}$. Бидејќи цифрата 5 прв пат може да се јави на $1,2,3,...,n-$тото место и настаните се дисјунктни, ако ја искористиме формулата

$$a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+...+ab^{n-2}+b^{n-1}),$$

од принципот на збир следува дека

$$\begin{aligned} x_n &= 10^{n-1}+9\cdot 10^{n-2}+...+9^{k-1}\cdot 10^{n-k}+...+9^{n-1} \\ &= (10-9)(10^{n-1}+9\cdot 10^{n-2}+...+9^{k-1}\cdot 10^{n-k}+...+9^{n-1}) \\ &= 10^n-9^n. \end{aligned}$$

Четврт начин. Нека x_{n+1} е бројот на $(n+1)-$цифрените броеви кои го задоволуваат условот на задачата. Ќе ја најдеме врската меѓу броевите x_{n+1} и x_n. Ако во последните n цифри се наоѓа цифрата 5 (такви броеви има x_n) тогаш за новата $(n+1)-$ва цифра можеме да ја избереме било која цифра од множеството $A\,(|A|=10)$, т.е. имаме $10x_n$ броеви кои го задоволуваат условот на задачата. Ако во последните n цифри не е цифрата 5 (такви броеви има 9^n), тогаш $(n+1)-$вата цифра мора да биде 5, па затоа такви броеви има 9^n. Бидејќи разгледуваните два настани се дисјунктни од принципот на збир следува

$$x_{n+1}=10x_n+9^n. \tag{1}$$

Ако во (1) наместо n ставиме $n+1$ добиваме

$$x_{n+2}=10x_{n+1}+9^{n+1}. \tag{2}$$

Равенката (1) ја множиме со 9 и ја одземаме од равенката (2), со што ја добиваме равенката

$$x_{n+2}-19x_{n+1}+90x_n=0, \tag{3}$$

која е хомогена диференцна равенка од втор ред. Притоа, јасно е дека $x_1=1$ и $x_2=10\cdot 1+9^1=19$. Карактеристичната равенка на равенката (3) е $t^2-19t+90=0$ и нејзини решенија се $t_{1/2}=\frac{19\pm\sqrt{19^2-4\cdot 90}}{2}=\frac{19\pm 1}{2}$, т.е. $t_1=9$ и $t_2=10$. Според тоа, решенија на равенката (3), т.е. на равенката (1) е $x_n=10^nM+9^nN$, при што константите M и N ги определуваме од почетните услови, т.е. од системот

$$\begin{cases} 10M+9N=1 \\ 10^2M+9^2N=19 \end{cases}$$

Решението на последниот систем е $M=1, N=-1$, што значи дека $x_n=10^n-9^n$.

Петти начин. Со C_i да го означиме множеството $n-$цифрени броеви ка кои на $i-$тото место има цифра 5. Бидејќи цифрата 5 не се појавува прв пат на $i-$тото место множествата C_i, $i=1,2,...,n$ не се дисјунктни. Бидејќи на $i-$тото место е финсирана цифрата 5, а на останатите $n-1$ место може да е било која цифра од множеството $A\,(|A|=10)$ добиваме $|C_i|=10^{n-1}$. Понатаму, ако $i\neq j$, тогаш на две места е фиксирана цифрата 5, а на останатите е било која цифра од множеството $A(|A|=10)$, па затоа за $i \neq j$ важи $|C_i \cap C_j|=10^{n-2}$. Слично, за $i_1, i_2, ..., i_k, i_j \neq i_t$ важи $|C_{i_1} \cap C_{i_2} \cap ... \cap C_{i_k}|=10^{n-k}$. Според тоа, бидејќи пресек на k множества од фамилијата множества C_i, $i=1,2,...,n$ може да се направи на $\binom{n}{k}$ начини, а бројот 5 може да биде на било кое од $n-$те места од принципот на вклучување и исклучување следува

$$\begin{aligned}
x_n &= |C_1 \cup C_2 \cup ... \cup C_n| \\
&= \sum_{1\leq i\leq n} |C_i| - \sum_{1\leq i<j\leq n} |C_i \cap C_j| + ... + (-1)^{n-1}\sum |C_1 \cap C_2 \cap ... \cap C_n| \\
&= \binom{n}{1}\cdot 10^{n-1} - \binom{n}{2}\cdot 10^{n-2} + \binom{n}{3}\cdot 10^{n-3} + ... + (-1)^{n-1}\binom{n}{n}\cdot 1 \\
&= 10^n - (\binom{n}{0}\cdot 10^n - \binom{n}{1}\cdot 10^{n-1} + \binom{n}{2}\cdot 10^{n-2} - \binom{n}{3}\cdot 10^{n-3} + ... + (-1)^n \binom{n}{n}\cdot 1) \\
&= 10^n - (10-1)^n \\
&= 10^n - 9^n.
\end{aligned}$$

Шести начин. Експоненцијалната генераторна функција на варијациите со повторување на елементите на множеството $A(|A|=10)$ во кои цифрата 5 се појавува барем еднаш е:

$$H(t) = (\tfrac{t}{1!} + \tfrac{t^2}{2!} + \tfrac{t^3}{3!} + ...)(1 + \tfrac{t}{1!} + \tfrac{t^2}{2!} + \tfrac{t^3}{3!} + ...)^9,$$

при што првиот множител се однесува на цифрата 5, а вториот множител се однесува на останатите цифри. Понатаму, ако се искористи дека развојот на експоненцијалната функција во ред е $e^t = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}$, добиваме

$$\begin{aligned}
H(t) &= (e^t - 1)e^{9t} = e^{10t} - e^{9t} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(10t)^k}{k!} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(9t)^k}{k!} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} (10^k - 9^k)\frac{t^k}{k!}.
\end{aligned}$$

Според тоа, бидејќи бројот на бараните броеви е еднаков на бројот на пожелните варијации од $n-$ти, а овој број е еднаков на коефициентот пред $\frac{t^n}{n!}$ во генераторната функција $H(t)$ добиваме дека $x_n = 10^n - 9^n$. ■

Литература

1. Cvetković, D., Simić, S.: Diskretna matematika, Prosveta, Niš, 1995
2. Малчески, Р., Малческа, В.: Математика 5 – дискретна математика (второ издание), ФОН универзитет , Скопје, 2011
3. Малчески, Р., Малческа, В.. Математика 1 – алгебарски структури (второ издание), ФОН универзитет, Скопје, 2012

Подготвиле
Катерина Аневска
Методи Главче