Ристо Малчески, Скопје

РЕШАВАМЕ КОНСТРУКТИВНИ ЗАДАЧИ

Барањето да се нацрта некоја геометриска фигура со помош на дадени инструменти за цртање го нарекуваме *конструктивна задача*.

Решавањето на една конструктивна задача опфаќа неколку наизглед независни делови, кои во суштина претставуваат една целина и тие се:

- опишување на постапката за конструирање на бараната фигура,
- доказ дека конструкцијата е можна при дадените услови во задачата и
- дискусија за можните решенија на задачата.

Значи, решавањето на конструктивна задача треба да заврши со дискусија за можните решенија на задачата. Секако, за да можеме да дискутираме за можните решенија на една конструктивна задача, потребно е да знаеме дека р*ешение* на една конструктивна задача е секоја фигура што ги задоволува условите на задачата.

Инструментите со кои се реализира конструкцијата на дадена фигура се линијар и шестар. Најчесто, за линијарот и шестарот, следните конструкции се земаат за основни и тие укажуваат на можностите на овие инструменти:

- конструкција на отсечка, ако се дадени нејзините крајни точки,
- конструкција на права што минува низ две дадени точки,
- конструкција на кружница, ако се зададени нејзиниот центар и радиус,
- конструкција на пресечна точка меѓу две прави (ако постои),
- конструкција на пресечни точки меѓу права и кружница (ако постојат) и
- конструкција на пресечни точки меѓу две кружници (ако постојат).

Ако се има предвид дека со линијар и шестар се можни само наведените основни конструкции, заклучуваме дека цртањето на бараната геометриска фигура се состои во последователно изведување на *конечна низа* основни конструкции (можно е нивно повеќекратно повторување), по чие извршување ќе можеме да сметаме дека бараната фигура е конструирана.

Решавањето на една конструктивна задача најчесто опфаќа три етапи. Меѓутоа, ова се однесува на полесните конструктивни задачи, кај кои е воочлива конечната низа основни конструкции со чија помош ја цртаме бараната фигура. Ако станува збор за посложена конструктивна задача и патот за нејзиното решавање не е очигледен, тогаш ја имаме четири, и тоа: *анализа, конструкција, доказ и дискусија*. Ќе се осврнеме на секој од нив.

Анализа. Анализата на задачата е првата (подготвителна) етапа во решавањето на конструктивните задачи, но, исто така, таа е и најважана, бидејќи ја подготвува конструкцијата, односно овозможува да се согледа решението на задачата. Целта на оваа етапа е да се откријат врските меѓу дадените и бараните елементи на фигурата која треба да ја нацртаме. Истовремено таа овозможува да се согледа по која постапка или метод најцелисходно може да се реши задачата.

Обично анализата почнува со скицирање на цртеж. Потоа на направената скица се воочуваат познатите елементи, се одделуваат попрости фигури (или се формираат со дополнување на цртежот) и меѓу нив се бара таква помошна фигура која ќе ги задоволува следните два услова:

- *таа фигура може да се конструира од дадените елементи на основната задача и*
- *тргнувајќи од неа може да се конструира бараната фигура.*

Конструкција. Оваа етапа се реализира врз основа на извршената анализа. Имено, користејќи ги елементите дадени во условот на задачата, согласно извршената анализа последователно се реализираат помошните конструкции со чија помош ја конструираме бараната фигура.

Доказ. Со доказот всушност потврдуваме дека конструираната фигура навистина ги задоволува условите на задачата.

Дискусија. Како што рековме, самата анализа скоро да го определува методот со кој ќе ја конструираме бараната фигура. Како резултат на конструкцијата најчесто добиваме едно решение на задачата, но за целосно нејзино решавање треба да одговориме на следните прашања:

- *дали при различен избор на дадените елементи, односно дали секогаш може да биде конструирана бараната фигура и*
- *колку решенија има задачата при различен избор на елементите дадени во условот на задачата, т.е. дали со дадените елементи може да се конструира само една или повеќе нескладни фигури кои се решенија на задачата?*

Као што можеме да забележиме, дискусијата има за цел да ги определи условите кога задачата е решлива и да го определи бројот на решенијата на истата. Затоа, е пожелно дискусијата да се спроведува така, што се анализира секој чекор на конструкцијата водејќи сметка дали и при кои услови чекорот е можен, на колку различни начини тој може да се направи и дали различните начини доведуваат до различни решенија.

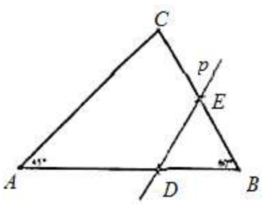
Во следните примери ќе покажеме како се решава конструктивна задача.

1. Конструирај $\triangle ABC$ ако $\overline{AB} = 6\,cm$, $\measuredangle CAB = 45^\circ$ и $\measuredangle ABC = 60^\circ$, а потоа конструирај права p која ги сече отсечката AB во точка D и отсечката BC во точка E такви што $\overline{DB} = \overline{DE} = \overline{CE}$.

   Решение. *Анализа.* Нека претпоставиме дека задачата е решена. Од равенството $\overline{DB} = \overline{DE}$ следува дека $\triangle DBE$ е рамнокрак. Затоа

   $$\measuredangle BDE = \measuredangle DBE = \measuredangle ABC = 60^\circ,$$

   т.е. $\triangle DBE$ е рамностран. Според тоа, $\overline{DB} = \overline{DE} = \overline{BE}$, па како $\overline{DE} = \overline{CE}$ добиваме $\overline{BE} = \overline{CE}$, што значи дека точката E е средина на страната BC.



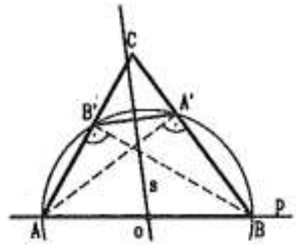
   Конструкција. Конструираме $\triangle ABC$, за кој се дадени $\overline{AB} = 6\,cm$, $\measuredangle CAB = 45^\circ$ и $\measuredangle ABC = 60^\circ$. Конструираме симетрала на страната BC и во пресекот на симетралата и страната BC ја наоѓаме точката E. Конечно, точката D ја наоѓаме во пресекот на кружницата $k(B, \overline{BE})$ и страната AB, по што низ точките D и E ја повлекуваме правата p.

   Доказ. Непосредно следува од анализата и конструкцијата.

   Дискусија. Триаголникот ABC е еднозначно определен, а од анализата и конструкцијата следува дека и точките D и E се еднозначно определени. Според тоа, задачата има едно и единствено решение.

2. Во рамнината се дадени права p и точки A' и B' кои се наоѓаат на иста страна од правата p. Конструирај $\triangle ABC$ чии темиња A и B се наоѓаат на правата p и отсечките AA' и BB' се висини на триаголникот ABC.

Решение. *Анализа*. Нека претпоставиме дека задачата е решена. Бидејќи $\measuredangle AA'B = \measuredangle BB'A = 90^\circ$, заклучуваме дека точките A' и B' се наоѓаат на кружницата со центар во средината O на отсечката AB (цртеж десно). Понатаму, бидејќи $A'B'$ е тетива на оваа кружница, центарот O на кружницата лежи и на симетралата на отсечката $A'B'$.



Конструкција. Ја конструираме симетралата s на отсечката $A'B'$ и ја наоѓаме точката $O = s \cap p$. Потоа конструираме кружница $k(O, \overline{OA'})$ и наоѓаме $k \cap p = \{A, B\}$. Ги повлекуваме правите AB' и BA'' и во пресекот на истите го наоѓаме темето C на $\triangle ABC$.

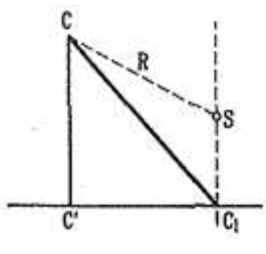
Доказ. Непосредно следува од анализата и конструкцијата.

Дискусија. Задачата нема решение ако $A'B' \perp p$, а во спротивно има решение

3. Конструирај $\triangle ABC$ ако се дадени: висината $\overline{CC'} = h_c = 3\,cm$, тежишната линија $\overline{CC_1} = t_c = 4\,cm$ и радиусот $R = 3\,cm$ на опишаната кружница околу $\triangle ABC$

Решение. *Анализа*. Нека претпоставиме дека задачата е решена и нека C_1 е средината на страната AB, а C' е подножјето на висината повлечена од темето C (направи цртеж). Тогаш $\triangle CC'C_1$ е правоаголен и за него се познати хипотенузата $\overline{CC_1} = t_c = 4\,cm$ и една катета $\overline{CC'} = h_c = 3\,cm$, па затоа може да се конструира. Понатаму, центарот S на опишаната кружница околу $\triangle ABC$ припаѓа на симетралата на страната AB, а тоа е нормалата на $C'C_1$ во точката C_1 и лежи на кружницата $k(C, R)$.

Конструкција. Конструираме правоаголен $\triangle CC'C_1$ таков што $\overline{CC'} = h_c = 3\,cm$ и $\overline{CC_1} = t_c = 4\,cm$ (цртеж десно). Во точката C_1 конструираме нормала на правата $C'C_1$ и конструираме кружница $k(C, R)$ и во нивниот пресек ја наоѓаме точката S. Конструираме кружница $k_1(S, R)$ и во пресекот со правата $C'C_1$ ги наоѓаме темињата A и B на $\triangle ABC$.



Доказ. Непосредно следува од анализата и конструкцијата.

Дискусија. Задачата има единствено решение.

4. Дадени се три неколинеарни точки A, C и E. Конструирај правоаголник $ABCD$ ако A и C се негови темиња, а E е точка на дијагоналата BD.

Решение. *Анализа*. Нека S е средината на отсечката AC. Тогаш дијагоналата BD припаѓа на правата SE. Понатаму, бидејќи аглите ABC и ADC се прави, точките B и D припаѓаат на кружницата $k(S, \overline{SA})$, направи цртеж.

Конструкција. Ја конструираме симетралата s на отсечката AC и наоѓаме $s \cap AC = \{S\}$. Ја повлекуваме правата SE и ја цртаме кружницата $k(S, \overline{SA})$. Имаме $s \cap k = \{B, D\}$ со што правоаголникот $ABCD$ е конструиран (направи цртеж).

Доказ. Непосредно следува од анализата и конструкцијата.

Дискусија. Задачата има единствено решение.