Илија Јанев

Метод на неодредени коефициенти

Некои математички задачи се решаваат многу едноставно, додека обратното барање понекогаш претставува неопремостива препрека. На сите ние јасно дека квадрирањето е многу полесно, отколку коренувањето, кубирањето секој од нас лесно го извршува, додека барањето кубен корен многумина од нас веќе го заборавиле. Слично, множењето на два полинома не претставува посебна тешкотија, додека обратната задача-разложувањето на множители е далеку посложено. Секој од нас може лесно и брзо да ја одреди разликата на дропките $\frac{1}{k}$ и $\frac{1}{k+1}$, и ќе се добие $\frac{1}{k^2+k}$. Но, да се запрашаме колкумина би ја решиле обратната задача: да ја претвориме дропката $\frac{1}{k^2+k}$ како збир на две дропки. Очигледно, оваа задача е посложена и е "нестандардна".

Оваа и слични на неа задачи се решаваат со т.н. **метод на неодредени коефициенти**. Тој се базира на теоремата за идентични полиноми: Два полиноми се идентични ако и само ако им се еднакви соодветните коефициенти.

Методот на неодредени коефициенти се употребува тогаш, кога во резултатот при трансформирањето на даден израз се добива друг израз од познат вид со коефициенти кои треба да се одредат. Да го покажеме тоа на конкретни примери.

Пример 1.Подреди го полиномот $2x^3+5x^2+3$ по степените на $x+1$.

Решение.Треба да одредиме полином $P(x+1)$, таков што ќе биде идентичен на дадениот. Притоа, полиномот $P(x+1)$ ќе биде од трет степен, т.е.

$$P(x+1)=A(x+1)^3+B(x+1)^2+C(x+1)+D .$$

чии неодредени коефициенти A,B,C и D треба да ги одредиме, така што да важи идентитетот

$$A(x+1)^3+B(x+1)^2+C(x+1)+D=2x^3+5x^2+3 . \quad (1)$$

Прво левата страна на идентитетот ја подредуваме по степените на x и добиваме:

$$Ax^3+(3A+B)x^2+(3A+2B+C)x+A+B+C+D\equiv 2x^3+5x^2+0\cdot x+3 .$$

Изедначувајќи ги коефициентите пред соодветните членови го добиваме системот:

$$\begin{cases} A=2 \\ 3A+B=5 \\ 3A+2B+C=0 \\ A+B+C+D=3 \end{cases}$$

од каде што $A=2, B=-1, C=-4, D=6$. Следствено,

$$P(x+1)=2(x+1)^3+-(x+1)^2-4(x+1)+6 .$$

Да забележиме дека од идентитетот (1) можевме веднаш да го одредиме главниот коефициент A, со што би се упростила постапката за одредување на останатите коефициенти.

Равенките за одредување на коефициентите можеме да ги добиеме и на друг начин- со давање на одредени вредности на аргументот x.

Да го докажеме тоа на истиот пример. Значи, треба да важи идентитетот:

$$2(x+1)^3+A(x+1)^2+B(x+1)+C=2x^3+5x^2+3 . \quad (2)$$

За одредување на коефициентите A,B и C во (2) заменуваме:

за $x=-1$ и добиваме: $C=-2+5+3$.

за $x=1$ и добиваме: $16+4A+2B+C=2+5+3$,

за $x=0$ и добиваме: $2+A+B+C=3$.

од каде што: $C=6, A=-1, B=-4$.

Значи, $P(x+1)=2(x+1)^3+-(x+1)^2-4(x+1)+6$.

Пример 2.Со методот на неодредени коефициенти изведи ја формулата за куб на трином.

Решение. Бидејќи $(x+y+z)^3$ е симетричен полином од трет степен со три променливи, имаме:

$$(x+y+z)^3=A(x^3+y^3+z^3)+B(x^2y+x^2z+y^2x+y^2z+z^2x+z^2y)+Cxyz \quad (3)$$

каде што A,B и C се бараните коефициенти.

Очигледно е дека $A=1$ (Зошто? Инаку до тој резултат се доаѓа ако во (3) ставиме: $x=1, y=z=0$).Понатаму: за $x=y=1$, $z=0$ добиваме: $8=2A+2B$; од тука $B=3$, за $x=y=z=1$ добиваме: $27=3A+6B+C$; од тука $C=6$.

Следствено,

$$(x+y+z)^3=(x^3+y^3+z^3)+3(x^2y+x^2z+y^2x+y^2z+z^2x+z^2y)+6xyz .$$

Посебно голема примена на методот на неодредени коефициенти имаме кај рационалните функции $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$.

Се докажува дека секоја правилна рационална функција може да се претстави на единствен начин како збир од прости дропки.

Тоа разложување зависи од видот на корените на полиномот $Q(x)$. Ако $Q(x)$ има само реални и различни корени, т.е. ако $Q(x)=(x-a)(x-b)...(x-c)$, тогаш разложувањето на правилната нескратлива дропка е следното:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b}+...+\frac{C}{x-c}, \quad A\cdot B\cdot ...\cdot C\neq 0 . \qquad (*)$$

Ако при тоанекој од корените, на пример коренот a, е сложен од k-ти ред, тогаш наместо дропката $\dfrac{A}{x-a}$ во (*), ќе го имаме збирот:

$$\frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\frac{A_3}{(x-a)^3}+...+\frac{A_k}{(x-a)^k}, \quad A_k\neq 0 .$$

Ако пак $Q(x)$ има коњугирано комплексни корени, тогаш во разложувањето се јавуваат прости дропки од видот:

$$\frac{Ax+B}{x^2+px+q}, \quad p^2-4q<0, A\vee B\neq 0 .$$

Според изнесеното би имале, на пример:

$$\frac{5x-7}{(2x-1)(x+2)^2}=\frac{A}{2x-1}+\frac{B}{x+2}+\frac{C}{(x+2)^2},$$

$$\frac{x^2-3x+4}{(x-1)(x^2+1)^2}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+1}+\frac{Dx+E}{(x^2+1)^2}.$$

Со неколку конкретни примени ќе ја образложиме примената на методот на неодредени коефициенти при разложувањето на рационалните функции на прости дропки.

Пример 3.Разложи ја на прости дропки функцијата $f(x)=\dfrac{1}{4x^2-1}$.

Решение.Бидејќи $4x^2-1=(2x-1)(2x+1)$, имаме

$$\frac{1}{4x^2-1}=\frac{A}{2x-1}-\frac{B}{2x+1} \quad /\cdot[(2x-1)\cdot(2x+1)],$$

$$1=A(2x+1)+B(2x-1), \text{ т.е. } 1=2(A+B)x+A-B .$$

Изедначувајќи ги коефициентите пред соодв етните степени на x, добиваме:

$$\begin{cases} A+B=0 \\ A-B=1 \end{cases},$$

од каде што: $A=\dfrac{1}{2}, B=-\dfrac{1}{2}$, па значи

$$\frac{1}{4x^2-1}=\frac{1}{2(2x-1)}-\frac{1}{2(2x+1)} .$$

Пример 4.Пресметај го збирот

$$A=\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+...+\frac{1}{1995\cdot 1997} .$$

Решение. Користејќи го резултатот од претходниот пример, т.е. идентитетот

$$\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2k-1}+\frac{1}{2k+1}\right],$$

имаме:

$$A=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+...+\left(\frac{1}{1995}-\frac{1}{1997}\right)\right]=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{1997}\right)=\frac{998}{1997}.$$

Ако дропката не е правилна, т.е. ако степенот на $P(x)$ е поголем од степенот на $Q(x)$ ($\mathrm{st}\,P>\mathrm{st}\,Q$), тогаш прво вршиме делење на $P(x)$ со $Q(x)$ и добиваме

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=q(x)+\frac{P_1(x)}{Q(x)},$$

а потоа вршиме разложување на правилната дропка $\frac{P_1(x)}{Q(x)}$.

Пример 5. Функцијата $f(x)=\frac{x^3+2}{x^2-3x+2}$ претстави ја како збир на прости рационални функции.

Решение. Бидејќи степенот на броителот е поголем од степенот на именителот, прво треба да извршиме делење; имаме:

$$(x^3+2):(x^2-3x+2)=x+3$$
$$\pm x^3 \mp 3x^2 \pm 2x$$
$$3x^2-2x+2$$
$$\pm 3x^2 \mp 9x \pm 6$$
$$7x-4$$

Значи добиваме: $\frac{x^3+2}{x^2-3x+2}=x+3+\frac{7x-4}{x^2-3x+2}$, каде што треба правилната дропка $\frac{7x-4}{x^2-3x+2}$ да ја разложиме на прости дропки.

Од $x^2-3x+2=0$ добиваме $x=1$ и $x=2$, па имаме

$$\frac{7x-4}{x^2-3x+2}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-2},$$
$$7x-4=(A+B)x-2A-B.$$

Со изедначување на коефициентите пред соодветните степени на променливата x, добиваме:

$$\begin{cases} A+B=7 \\ -2A-B=-4 \end{cases}, \text{ т.е. } A=-3,\ B=10.$$

Значи,

$$\frac{x^2+2}{x^2-3x+2}=x+3-\frac{3}{x-1}+\frac{10}{x-2}.$$

Пример 6.Разложи ја на прости дропки функцијата

$$f(x)=\frac{2x-10}{x^4-1}.$$

Решение.Бидејќи $x^4-1=(x^2-1)\cdot(x^2+1)=(x-1)\cdot(x+1)\cdot(x^2+1)$, имаме

$$\frac{2x-10}{x^4-1}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}+\frac{Cx+D}{x^2+1},$$
$$2x-10=A(x^3+x^2+x+1)+B(x^3-x^2+x-1)+(Cx+D)(x^2-1)=$$
$$=(A+B+C)x^3+(A-B+D)x^2++(A+B-C)x+A-B-D$$

Со изедначување на коефициентите пред соодветните членови го добиваме системот равенки

$$\begin{cases} A+B+C=0 \\ A-B+D=0 \\ A+B-C=2 \\ A-B-D=-10, \end{cases}$$

од каде што: $A=-2, B=3, C=-1, D=5$, па значи:

$$\frac{2x-10}{x^4-1}=\frac{3}{x-1}+\frac{2}{x+1}-\frac{x-5}{x^2+1}.$$

Очигледно, многу полесно ќе беше ако требаше да ги соберем простате дропки на десната страна на последното равенство. Стори го тоа сам; така ќе извршиш проверка на резултатот.

На крајот ви нудиме неколку задачи за вежба.

1.Со примена на методот на неодредени коефициенти трансформирај го полиномот x^2+4x-3 во облик $(x-\alpha)^2+\beta$.

2.Подреди го полиномот x^3-3x^2+4 по степените на $x-1$.

3.Разложи ја на прости дропки функцијата:

а) $\dfrac{25}{(x-2)(x+3)^2}$, б) $\dfrac{3x-7}{x^5-x^4+2x^3-2x^2+x-1}$.

4.Пресметај го збирот

а) $\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 4}+....+\dfrac{1}{n\cdot(n+1)}$, б) $\dfrac{1}{1\cdot 4}+\dfrac{1}{4\cdot 7}+\dfrac{1}{7\cdot 10}+....+\dfrac{1}{(3n-2)\cdot(3n+1)}$.

Одговори. 1. $(x-2)^2-7$ **2.** $(x-1)^3-3\cdot(x-1)+2$. **3.а)** $\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{1}{x+3}-\dfrac{5}{(x+3)^2}$.

3.б) $\dfrac{1}{1-x}+\dfrac{x+1}{x^2+1}+\dfrac{2x+5}{(x^2+1)^2}$. **4.**а) $\dfrac{n}{n+1}$. **4.**б) $\dfrac{n}{3n+1}$.

Легенда за шахот

Сигурно ќе се сложите дека шахот е една од најостроумните игри која човекот ја измислили, игра стара илјада години, по потекло од кина, и преку Индија, Персија и Арабија се пренела во Европа и Америка, т.е. го освоила светот.

Но дали знаете некоја легенда за оваа игра? Алко не знаете, тогаш прочитајте ја нашата приказна:

Легендата кажува дека шахот го измислил индискиот учител Сета. Кога тогашниот индиски цар Шерам научил да игра шах, бил воодоошевен од остроумноста на играта, па затоа го повикал Сета и му рекол:

-Сакам достојно д ате наградам за прекрасната игра, која ја пронајде.Кажи ми каква награда сакаш и јас ќе ти ја дадам.

После кратко размислување Сета одговорил:

-Господару, ставете на првото поле од шаховската табла едно зрно пречница, на второто поле две зрна итн., на секое следно поле двапати повеќе. Потоа соберете ја поставената пченица и тоа нека биде мојата награда.

Царот Шерам би изненаден и навреден од “скромното” барање на Сета и налутено одговорил:

Земи ја твојата вреќа пченица и оди си.

Меѓутоа после два дена управителот на дворецот возбудено му соопштил н а Шерам дека не е во состојба да ја исплатат наградата на мудриот Сета.Шерам не знаел што да прави, ветил дека ќе ја исполни желбата на учителот, а тоа не било можно. Сваќајќи дека неговото богатство и моќ не се толку големи како што мислел и дека мудроста на Сета уште еднаш победила, запрепастено запрашал:

-Колку зрна се потребни?

* * *

Па, колку зрна се потребни? Не е тешко да се пресмета дека бројот на зрната е

$$1+2+2^2+2^3+...+2^{63}=2^{64}-1=18446744073709551615.$$

За илустрација да кажеме дека за да се складира пченицата со која Шерам требало да го награди Сета потребен е силос широк 40 m, висок 10m и долг 3000000 km.