Алекса Малчески
Скопје

РЕГРЕСИВНА ИНДУКЦИЈА

При докажување на голем број математички тврдења се користи таканаречениот принцип на регресивна индукција, кој го предложил францускиот математичар Коши. Овој метод на докажување, кој во литературата е познат како докажување од n кон $n-1$, се состои во докажување на импликацијата $T(n) \Rightarrow T(n-1)$, каде со $T(n)$ е означено тврдењето кое се докажува. Јасно, самата импликација не е доволна за да се докаже дека тврдењето $T(n)$ важи за секој природен број n, туку потребно е да се знае дека тврдењето важи за бесконечно многу природни броеви, што во некои случаи едноставно се докажува. Попрецизно, *принципот на регресивна индукција* гласи*:*

Нека $T(n)$ е тврдење кое зависи од природниот број n. Ако

i) $T(n)$ е точен исказ за бесконечно многу природни броеви и

ii) за секој природен број $n>1$ исказот $T(n) \Rightarrow T(n-1)$ е вистинит,

тогаш тврдењето $T(n)$ важи за секој природен број n.

Принципот на регресивна индукција прецизно може да се изведе од принципот на математичка индукција, меѓутоа ние без доказ ќе прифатиме дека овој метод на заклучување е точен.

Пример 1. Докажи дека за позитивни броеви $a_1, a_2, ..., a_n, b_1, b_2, ..., b_n$ важи неравенството

$$\sqrt[n]{(a_1+b_1)(a_2+b_2)...(a_n+b_n)} \geq \sqrt[n]{a_1a_2...a_n} + \sqrt[n]{b_1b_2...b_n}\ .$$

Решение. Воведуваме смена $\frac{a_i}{b_i} = x_i,\ i = 1, 2, ..., n$ и даденото неравенство е еквивалентно со неравенството

$$\sqrt[n]{(1+x_1)(1+x_2)...(1+x_n)} \geq 1 + \sqrt[n]{x_1x_2...x_n}\ , \tag{1}$$

кое ќе го докажеме со помош на регресивна индукција.

За $n=2$ даденото неравенство е еквивалентно со

$$\sqrt{(1+x_1)(1+x_2)} \geq 1 + \sqrt{x_1x_2}\ ,$$

т.е. со неравенството $x_1 + x_2 \geq 2\sqrt{x_1x_2}$, кое пак е еквивалентно со очигледното неравенство $(\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2})^2 \geq 0$.

Нека претпоставиме дека (1) важи за некој природен број n. Ќе докажеме дека важи за бројот $2n$. Навистина

$$\sqrt[2n]{(1+x_1)(1+x_2)...(1+x_{2n-1})(1+x_{2n})} = \sqrt[n]{\sqrt{(1+x_1)(1+x_2)}...\sqrt{(1+x_{2n-1})(1+x_{2n})}}$$
$$\geq \sqrt[n]{(1+\sqrt{x_1x_2})...(1+\sqrt{x_{2n-1}x_{2n}})}$$
$$\geq 1+\sqrt[n]{\sqrt{x_1x_2}...\sqrt{x_{2n-1}x_{2n}}}$$
$$= 1+\sqrt[2n]{x_1x_2...x_{2n-1}x_{2n}}.$$

Според тоа, од принципот на математичка индукција следува дека неравенството (1) важи за сите броеви од облик 2^n.

Нека претпоставиме дека (1) важи за некој природен број n и да докажеме дека важи $n-1$. За таа цел во (1) да земеме $1+x_n = \sqrt[n-1]{(1+x_1)(1+x_2)...(1+x_{n-1})}$. Добиваме

$$\sqrt[n]{[(1+x_1)...(1+x_{n-1})]^{1+\frac{1}{n-1}}} \geq 1+\sqrt[n]{x_1...x_{n-1}[\sqrt[n-1]{(1+x_1)...(1+x_{n-1})}-1]},$$

односно

$$\sqrt[n-1]{(1+x_1)...(1+x_{n-1})} \geq 1+\sqrt[n]{(x_1...x_{n-1})^{1+\frac{1}{n-1}}} = 1+\sqrt[n-1]{x_1...x_{n-1}},$$

па од принципот на регресивна индукција следува дека неравенството (1) важи за секој природен број n. ■

Во следниот пример, со помош на регресивна индукција ќе дадеме доказ на неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина

Пример 2 (неравенство на Коши). За аритметичката и геометриската средина на позитивните реални броеви $a_1, a_2, ..., a_n$ важи

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i \geq \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} a_i},$$

при што знак за равенство важи ако и само ако $a_1 = a_2 = ... = a_n$.

Решение. Прво со математичка индукција k ќе докажеме дека тврдењето важи за сите природни броеви од облик $n = 2^k, k \in \mathbb{N}$.

За $k=1$, т.е. $n=2$ неравенството $\frac{a_1+a_2}{2} \geq \sqrt{a_1a_2}$ е еквивалентно со точното неравенство $(\sqrt{a_1}-\sqrt{a_2})^2 \geq 0$. Нека претпоставиме дека неравенството важи за $n = 2^k, k \geq 1$. Тогаш од претходно докажаното и од индуктивната претпоставка следува дека

$$\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{2n} a_i = \frac{1}{2}(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i + \frac{1}{n}\sum_{i=n+1}^{2n} a_i) \geq \sqrt{(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i)(\frac{1}{n}\sum_{i=n+1}^{2n} a_i)}$$
$$\geq \sqrt{\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} a_i} \cdot \sqrt[n]{\prod_{i=n+1}^{2n} a_i}} = \sqrt[2n]{\prod_{i=1}^{n} a_i \cdot \prod_{i=n+1}^{2n} a_i} = \sqrt[2n]{\prod_{i=1}^{2n} a_i},$$

па од принципот на математичка индукција следува дека тврдењето важи природните броеви од облик $n=2^k$, $k\in\mathbb{N}$, т.е. за бесконечно многу природни броеви.

Нека претпоставиме дека неравенството е точно за некој природен број n и да земеме $a_n=\frac{a_1+a_2+..+a_{n-1}}{n-1}$. Тогаш

$$\frac{a_1+a_2+..+a_{n-1}+\frac{a_1+a_2+..+a_{n-1}}{n-1}}{n}\geq\sqrt[n]{a_1a_2..a_{n-1}\frac{a_1+a_2+..+a_{n-1}}{n-1}},$$

од каде добиваме

$$\frac{a_1+a_2+..+a_{n-1}}{n-1}\geq\sqrt[n]{a_1a_2..a_{n-1}}\sqrt[n]{\frac{a_1+a_2+..+a_{n-1}}{n-1}}, \text{ т.е. } \left(\frac{a_1+a_2+..+a_{n-1}}{n-1}\right)^{1-\frac{1}{n}}\geq\sqrt[n]{a_1a_2..a_{n-1}}.$$

Затоа $\frac{a_1+a_2+..+a_{n-1}}{n-1}\geq\sqrt[n-1]{a_1a_2..a_{n-1}}$. Конечно од принципот на регресивна индукција следува дека даденото неравенство е точно за секој природен број n. ■