БМО 1999

1. Даден е остроаголен триаголник ABC. Нека D е средина на помалиот лак BC на кружницата опишана околу $\triangle ABC$. Точките E и F се симетрични на точката D соодветно во однос на правата BC и центарот на опишаната кружница околу $\triangle ABC$. Нека K е средина на отсечката EA.

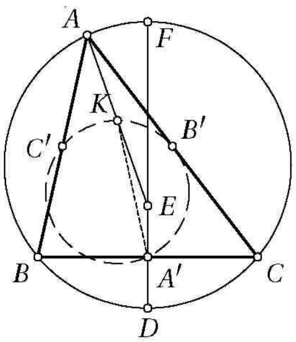
   а) Докажи дека кружницата која минува низ средините на страните на $\triangle ABC$ ја содржи точката K.

   б) Докажи дека правата која минува низ точката K и средината на страната BC е нормална на правата AF.

   Решение. а) Нека со A', B', C' соодветно ги означиме средините на страните BC, CA, AB. Отсечките KB' и KC' се средни линии на триаголниците AEC и AEB, па затоа

$$\measuredangle C'KB' = \measuredangle BEC = \measuredangle CDB = 180^\circ - \measuredangle BAC$$
$$= 180^\circ - \measuredangle B'A'C',$$

   што значи дека точката K лежи на кружницата $A'B'C'$.



   б) Отсечката KA' е средна линија во триаголникот EAD, па затоа $KA' \parallel AD$. Понатаму, DF е дијаметар на кружницата ABC па затоа атоа $AD \perp AF$. Конечно, од $KA' \parallel AD$ и $AD \perp AF$ следува $KA' \perp AF$.

2. Нека $p > 2$ е прост број таков што $3 \mid p-2$. Докажи, дека најмногу $p-1$ елементи на множеството

$$S = \{y^2 - x^3 - 1 \mid x, y \in \mathbb{Z}, 0 \le x, y \le p-1\}$$

   се деливи со p.

   Решение. Од $p \equiv 2 \pmod 3$ следува дека броевите $0^3, 1^3, ..., (p-1)^3$ даваат различни остатоци при делење со p. Навистина, ако $a^3 \equiv b^3 \pmod p$, тогаш со степенување на $\frac{p-2}{3}$ добиваме $a^{p-2} \equiv b^{p-2} \pmod p$. Но, $a^{p-1} \equiv b^{p-1} \pmod p$, па затоа $a \equiv b \pmod p$. Според тоа, за секој $y \in \{0,1,2,...,p-1\}$ постои точно еден елемент $s_y = y^2 - x^3 - 1 \in S$ делив со p. Меѓутоа,

$$s_1 = 1^2 - 0^3 - 1 = 0 = 3^2 - 2^3 - 1 = s_3,$$

   па затоа меѓу елементите $s_0, s_1, ..., s_{p-1}$ има најмногу $p-1$ различни.

3. Нека M,N,P се подножјата на нормалите повлечени од тежиштето G на остроаголниот $\triangle ABC$ соодветно на страните AB,BC,CA. Докажи дека важи

$$\frac{4}{27} < \frac{P_{MNP}}{P_{ABC}} \le \frac{1}{4}. \qquad (1)$$

Решение. Ќе ги користиме стандардните ознаки a,b,c за страните на триаголникот соодветно наспроти темињата A,B,C, α,β,γ за соодветните агли и h_a,h_b,h_c за висините. Од

$$\overline{GM} = \frac{1}{3}h_c = \frac{1}{3}a\cos\beta,\ \overline{GN} = \frac{1}{3}h_a = \frac{1}{3}c\cos\beta \text{ и } \measuredangle MGN = 180^\circ - \beta$$

следува

$$P_{GMN} = \frac{1}{18}h_c h_a \sin\beta = \frac{1}{18}ac\sin^3\beta = \frac{1}{9}P_{ABC}\sin^2\beta.$$

Слично,

$$P_{GNP} = \frac{1}{9}P_{ABC}\sin^2\gamma \text{ и } P_{GPM} = \frac{1}{9}P_{ABC}\sin^2\alpha.$$

Според тоа, имаме

$$P_{MNP} = P_{GMN} + P_{GNP} + P_{GPM} = \frac{1}{9}P_{ABC}(\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma). \qquad (2)$$

Но,

$$K = \sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = \sin^2\alpha + 1 - \frac{\cos 2\beta + \cos 2\gamma}{2} = 1 + \sin^2\alpha + \cos\alpha\cos(\beta-\gamma),$$

па како $\cos\alpha < \cos(\beta-\gamma) \le 1$ следува

$$2 = 1 + \sin^2\alpha + \cos^2\alpha < K \le 1 + \sin^2\alpha + \cos\alpha = 2 + \cos\alpha - \cos^2\alpha \le \frac{9}{4}. \qquad (3)$$

Конечно, неравенствата (1) следуваат од равенството (2) и неравенствата (3).

4. Дадена е низата $0 \le x_0 \le x_1 \le x_2 \le \dots$ цели броеви таква што за секој $k \ge 0$ бројот на членовите кои не се поголеми од k е конечен (тој број да го означиме со y_k). Докажи дека за секои природни броеви m и n важи

$$\sum_{i=0}^{n} x_i + \sum_{j=0}^{m} y_j \ge (n+1)(m+1).$$

Решение. Да ги обележиме сите точки (i,j), $i,j \ge 0$ на целобројната решетка во рамнината за кои важи $j < x_i$. За дадено i, бројот на обележените точки (i,j) е еднаков на x_i, па така во множеството $S = \{(i,j) \mid 0 \le i \le n, 0 \le j \le m\}$ има најмногу $\sum_{i=0}^{n} x_i$ обележени точки. Од друга страна, за дадено j, необележени точки (i,j) за кои $i \ge 0$ има точно y_j, па така во множеството S има $\sum_{j=0}^{m} y_j$ необележени точки. Но, сите точки од множеството S се обележени

или не се обележени, па затоа $\sum_{i=0}^{n} x_i + \sum_{j=0}^{m} y_j$ не е помал од бројот на точките на множеството S, т.е. од $(n+1)(m+1)$.