Бети Андоновиќ, Скопје

ЗАПОЗНАВАЊЕ СО ТОПОЛОГИЈАТА ПРЕКУ НЕКОИ ИНТУИТИВНИ КОНЦЕПТИ И ПРИМЕРИ

Во текстов нема да биде дадена формална дефиниција за топологија; ќе биде начнато едно интуитивно чувство околу темата. Ова интуитивно чувство може да се развие со забележување на сличностите, и разликите, помеѓу топологијата и обичната средношколска геометрија.

Изненадувачки е фактот што прилично задоволителен опис на топологијата може да се добие со промена на "геометрија" во "топологија", "геометриско" во "тополошко" итн. Причината што е тоа така е завиткана и сокриена во изразот "може да се постави врз" (овде се мисли на поставување една фигура врз друга). Да го испитаме подетално изразот:

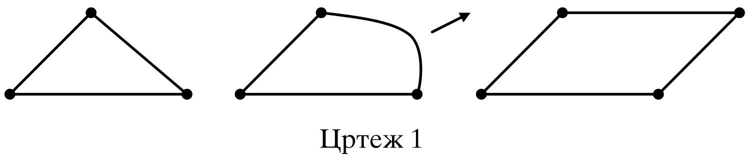
Како ја поставуваме фигурата врз? Како ја помрднуваме? Што смееме патем да и направиме? Во геометријата движењата што се дозволени се строги (ригидни) движења (транслации, ротации, симетрии), во кои растојанието помеѓу било кои две точки од фигурата не е променето.

Во тополоогијата, движењата што се дозволени може да се наречат **еластични движења**. Замислуваме дека нашите фигури се направени од совршено еластичен мареријал и при движењето, фигурата можеме да ја тегнеме, влечеме, виткаме, како и да ја искривуваме како што ни е волја. Дури ни е дозволено и да ја пресечеме фигурата и да ја врземе во јазол, осигурувајќи се дека подоцна ќе ја залепиме потполно исто како што била порано: така што, точките што биле една до друга пред да ја пресечеме фигурата, се една до друга и откако ќе ја залепиме. Слично, мораме да бидеме внимателни дека точките од фигурата кои се оддалечени, остануваат и натаму оддалечени; не смееме да присилиме две различни точки да се соединат во само една точка.

Две фигури се **тополошки еквивалентни** ако една фигура може да се направи да се поклопува со другата преку еластично движење. **Тополошки својства** на една фигура се оние кои ги има и секоја друга, тополошки еквивалентна на неа фигура. Така, сите тополошки еквивалентни фигури се еднакви за тополозите, и при проучувањето на одредена фигура, тие се интересираат само за својствата што се заеднички за сите фигури кои се тополошки еквивалентни со дадената. Или, *тополошки својства на една фигура се оние кои се инваријантни при еластични движења* - секое еластично движење на една фигура не предизвикува никаква разлика во тополошките својства на фигурата.

Многу важно е да напоменеме дека *секое тополошко својство на една фигура е исто така и геометриско својство на истата, но многу геометриски својства не се и тополошки својства.*

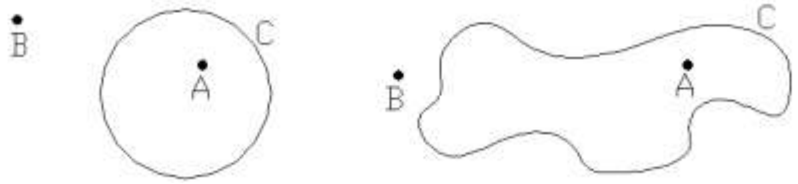
Пример: "Фигурата има три темиња" е геометриско својство, но не и тополошко, бидејќи, барем теоретски истата фигура може да се истегне "до четврто теме" (види слика 1).



Цртеж 1

Всушност, на прв поглед може да изгледа дека ниедно својство не е тополошко - дека било кое својство на една фигура би можело да се промени со некое еластично движење! За среќа, тоа не е така. На пример: една кружница C ги дели точките од една рамнина во три групи: точки во кружницата, точки на кружницата и точки надвор од кружницата (види слика 2).

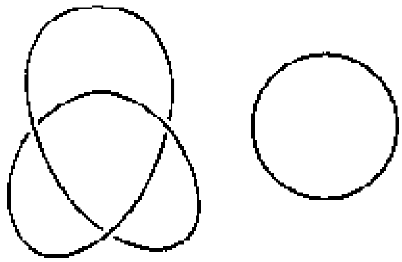
Ова својство на кружницата во рамнина е тополошко својство, бидејќи ако замислиме дека кружницата и двете точки A и B се означени на совршено еластична плоча, како и тоа дека фигурата е изложена на еластично движење, резултатот може да биде крива C и две точки A и B. Точките A и B се соодветно во и надвор од кружницата, а по еластичното движење, тие се уште се во и надвор од кривата C, соодветно.



Цртеж 2

Така, својството "A е во кривата C" е тополошко својство на оригиналната фигура. Својството "A е поблиску до C отколку B" не е тополошко својство, бидејќи со еластично движење можеме да направиме B да е многу блиску до C, додека A е многу далеку од C.

Како друга илустрација, кружницата и чворот се тополошки еквивалентни (види цртеж 3). Ако замислиме еден ластик во форма на кружница, не е возможно да се направи јазол само преку истегнување, но прилично е лесно доколку најпрво го пресечеме ластикот, потоа го врземе чворот, и конечно, да ги составиме двата краја како што биле претходно.



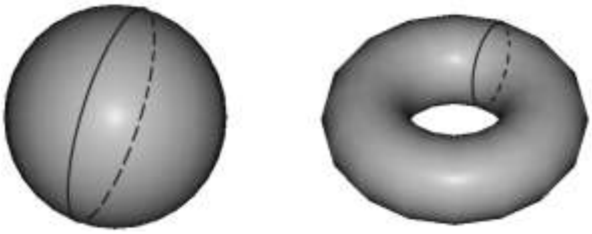
Цртеж 3

Бидејќи овие работи се дозволени според она што го нарековме еластично движење, двете криви се тополошки еквивалентни.

Ако две фигури се тополошки еквивалентни, овој факт би можеле да го докажеме преку изложување на еластично движење, што ја претвора едната фигура во другата, како во примерот со кружницата и чворот даден погоре.

Но, како би се обиделе да докажеме дека две фигури **не** се тополошки еквивалентни? Би било неопходно да се покаже дека ниедно еластично движење на едната фигура не би направило таа да се поклопи со другата. Секако, овде не можеме да ги пробаме сите еластични движења по ред - ги има премногу. Еден начин за давање ваков доказ е да се најде својство што го има едната фигура, а истото и недостига на другата. Ако ова својство е тополошко, тогаш двете фигури не можат да бидат тополошки еквивалентни, бидејќи ниедно еластично движење не може да го создаде или уништи ова својство, па така, ниедно еластично движење не може да направи едната фигура да се поклопи со другата.

Оваа постапка ја илустрираме докажувајќи дека сферата не е тополошки еквивалентна со торусот (види цртеж 4).

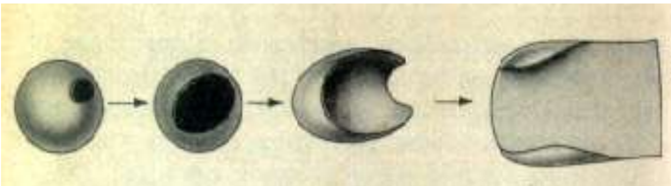


Цртеж 4

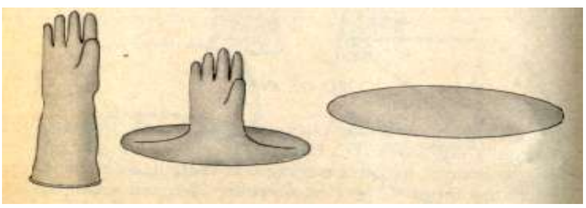
Всушност, секоја едноставно затворена крива на сферата, ја разделува сферата на **два дела**. Торусот го нема ова својство, бидејќи не е раздвоен со кружница која оди низ дупката или околу попречниот пресек на торусот - ако торусот се пресече со ваква кружница, површината постанува цевка, но сеуште е во **еден дел**. Така, сферата и торусот не се тополошки еквивалентни.

Еве илустрација на неколку пара тополошки еквивалентни фигури:

Трансформација на сфера во јајце

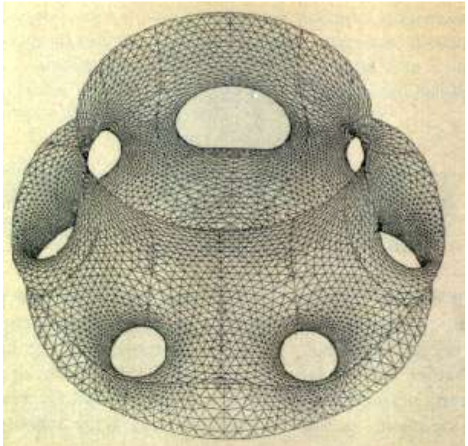


Трансформација на сфера со една дупка во рамнина



Трансформација на ракавица во диск

За крај ќе дадеме еден пример, кој не е елементарен како претходните, на една преобразба на сфера со три дупки и една рачка во една симетрична фигура, компјутерски генерирана:



Сфера со три дупки и една рачка и една нејзина тополошка трансформација