ГЕОМЕТРИСКИ ПРОБЛЕМ ОД ЛЕТОНИЈА [1]

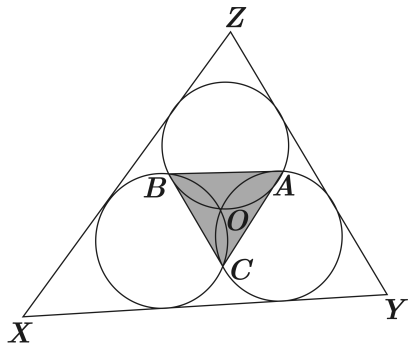
Звонко Черин
ПМФ, Загреб

Ќе дадеме три решенија на еден геометриски проблем од летонските математички натпревари од 1994 година. Во првото елементарно решение се користи хомотетија. Второто и третото се компјутерски поддржани од програмскиот пакет Maple V.

1. Проблемот

Во вториот круг од летонските натпревари по математика од 1994 година беше поставен следниот проблем за геометрија на кружници [2, стр. 8].

Проблем 1. Три еднакви кружници се сечат во точката O и по парови во точките A, B, C, соодветно. Нека T е триаголникот формиран од пресеците на заедничките тангенти на овие кружници. Нека кружниците се во внатрешноста на триаголникот T. Покажи дека плоштината на T е најмалку деветпати поголема од плоштината на триаголникот ABC.



црт. 1: Плоштината на $\triangle XYZ$ е најмалку деветпати поголема од плоштината на $\triangle ABC$.

Нека U, V и W се центрите на кружниците и нека X, Y, Z се темињата на триаголникот T. Тврдењето на проблемот 1 е последица од следната теорема. Во нејзината формулација се јавува центарот на *кружница на девете точки* на триаголник. Оваа кружница е позната како Фојербахова (Feuerbach) кружница. Најпознато нејзино својство е дека впишаната кружница ја допира одвнатре, додека трите однадвор впишани кружници ја допираат однадвор. Деветте точки од нејзиното име се средните точки на отсечките што ги врзуваат темињата со ортоцентарот (пресекот на висините). Читателот може да најде повеќе информации од книгите [8], [6], [5] и од следните Интернет страници:

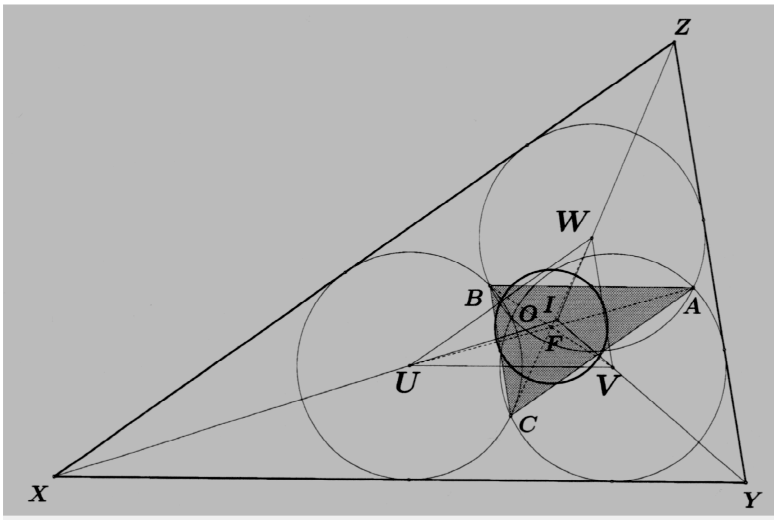
http://mathworld.wolfram.com/Nine-PointCircle.html
http://en.wikipwdia.org/wiki/Nine_point_circle.html
http://planetmath.org/encyclopedia/NinePointCircle2.html

Теорема 1. *(а) Триаголниците* ABC *и* UVW *се во меѓусебна врска преку хомотетија* $h(F, -1)$, *каде што* F *е заедничкиот центар на нивните кружници на девет точки.*

---

[1] Програмските решенија на проблемот ќе бидат објавени во следниот број на Сигма.

(б) Постои реален број $\lambda \geq 3$ таков што триаголникот XYZ е слика на триаголникот UVW преку хомотетија $h(I, \lambda)$ каде што I е центарот на неговата впишана кружница.

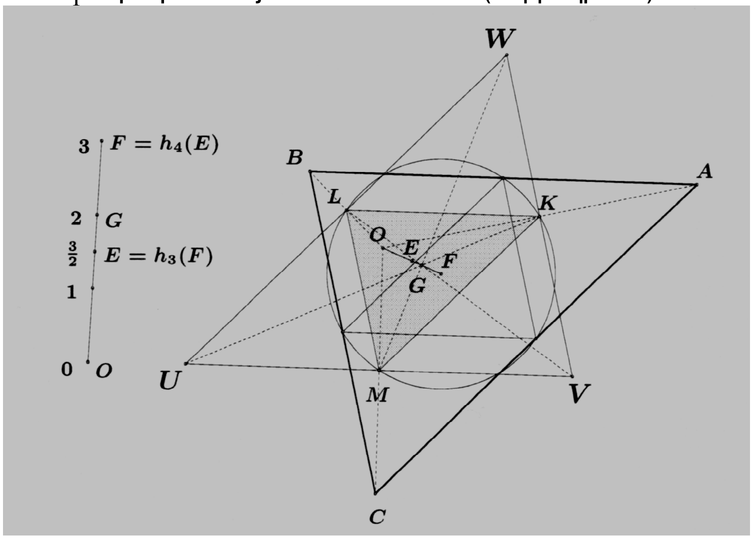


црт. 2: За хомотетиите $h_1 = h(F, -1)$ и $h_2 = h(I, \lambda)$ имаме: $ABC = h_1(UVW)$ и $XYZ = h_2(UVW)$, за $\lambda \geq 3$.

Навистина, како последица на (а) имаме дека $|UVW| = |ABC|$ (т.е. триаголниците ABC и UVW имаат еднакви плоштини), додека од (б) добиваме дека $|XYZ| = \lambda^2 |UVW|$. Според тоа, $\frac{|XYZ|}{|ABC|} = \lambda^2 \geq 9$, бидејќи $\lambda \geq 3$.

2. Доказ на Теоремата 1

Доказ на Теорема 1 (а). Бидејќи точките A, B, C се рефлексии на центарот O на опишаната кружница на триаголникот UVW врз неговите продолженија на страните, заклучуваме дека UVW и ABC се во меѓусебна врска преку составот (композицијата) на хомотетиите $h_3 = h(G, -\frac{1}{2})$ и $h_4 = h(O, 2)$ каде што G е пресекот на тежишните линии на UVW. Оваа композиција е всушност хомотетијата $h_1 = h(F, -1)$. Ова произлегува од фактот дека центарот F од кружницата на девет точки на триаголникот UVW е нејзината единствена фиксна точка, па според тоа е центар на хомотетијата, па во композицијата на хомотетиите, нивните коефициенти се множат. Точката F е исто така центар на кружницата на девет точки на триаголникот ABC, бидејќи хомотетијата h_1 го пренесува комплементарниот триаголник KLM на триаголникот UVW (со темиња во средните точки на страните на триаголникот UVW), во комплементарниот триаголник на триаголникот ABC, чии темиња остануваат на кружницата на девет точки од UVW, бидејќи хомотетијата h_1 е рефлексија во точката F (види црт. 3).



црт.3. Композицијата $UVW \xrightarrow{h(G,-\frac{1}{2})} KLM \xrightarrow{h(O,2)} ABC$
е хомотетијата $h(F,-1)$.

Доказ на Теорема 1 (б). Бидејќи заедничката тангента на две кружници што се сечат, а имаат еднакви радиуси, е паралелна со правата што минува низ нивните центри, следува дека соодветните продолженија на страните на триаголниците UVW и XYZ се паралелни, па според тоа, постои хомотетија меѓу тие триаголници. Правата XU е симетрала на аголот ZXY, бидејќи точката U е на еднакво растојание (за должината на радиусот R на опишаната кружница на триаголникот UVW) од полуправите XY и XZ. Правата UX е исто така симетрала на аголот WUV зашто соодветните продолженија на страните на триаголниците UVW и XYZ се паралелни. Одовде следува дека правите UX, VY и WZ се сечат во центарот I на кружницата впишана во триаголникот UVW. Точката I е исто така центар на хомотетијата којашто го праќа $\triangle XYZ$ во $\triangle UVW$.

Нејзиниот коефициент е еднаков на количникот:

$$\frac{|IX|}{|IU|} = \frac{|IU|+|UX|}{|IU|} = \frac{\dfrac{r}{\sin(\angle UXY)} + \dfrac{R}{\sin(\angle UXY)}}{\dfrac{r}{\sin(\angle UXY)}} = 1 + \frac{R}{r},$$

каде што r е радиусот на впишаната кружница во триаголникот UVW (црт.2). Од Ојлеровата теорема добро е познато дека $\frac{R}{r} \geq 2$, па значи коефициентот на хомотетијата е најмалку 3. Забележи дека нејзината најмала вредност се достигнува кога триаголникот е рамностран.

Горниот доказ јасно укажува на тоа дека е точна и следнава теорема.

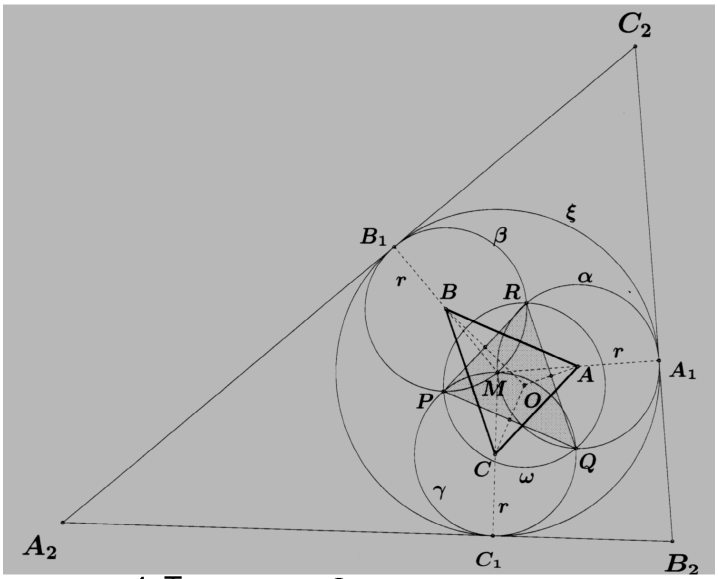
Теорема 2. (а) Триаголникот XYZ има најмалку трипати поголем периметар од периметарот на триаголникот ABC.

(б) Триаголникот XYZ има трипати поголем периметар од периметарот на триаголникот ABC ако и само ако триаголниците ABC, UVW и XYZ се рамнострани.

Теорема на Jonson на трите кружници и инверзија

Положбата на три кружници α, β, γ што имаат ист радиус r и што се сечат во точка M е разгледувана порано во [7], [3] и [4]. Jonson и Emch покажале дека ако кружниците се сечат и во точките P, Q, R, тогаш овое точки лежат на кружница ω чиј радиус е исто така еднаков на r (црт. 4).

Доказот на Теоремата 1 го содржи доказот на овој резултат. Овде ќе го прикажеме неговот краток доказ со инверзија, од статијата [4], којашто исто така разгледува и неколку други геометриски проблеми коишто можат да се решат со помош на инверзии. Инверзија е трансформација на рамнината што е определена со кружница. Читателите можат да добијат основни информации во врска со овој поим во книгите [5] и [11] или од интернет страницата:
http://mathworld.wolfram.com/Inversion.html



црт. 4: Теорема на Jonson за три кружници

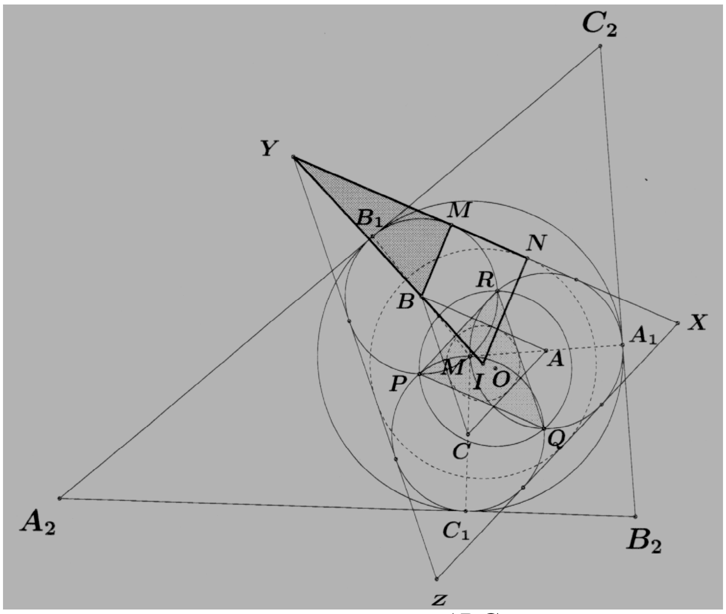
Нека ξ е впишана кружница во триаголникот $A_2B_2C_2$ чиј центар е во точката M и која ги допира страните $|B_2C_2|, |C_2A_2|, |A_2B_2|$ во точките A_1, B_1, C_1, соодветно. Сликите на правите B_2C_2, C_2A_2, A_2B_2 со инверзија во кружницата ξ, се кружниците α, β, γ коишто минуваат низ точката

M , ја допираат одвнатре кружницата ξ во точките A_1, B_1, C_1 и имаат исти радиуси $r = \frac{|MA_1|}{2} = \frac{|MB_1|}{2} = \frac{|MC_1|}{2}$. Покрај во точката M , тие се сечат и во точките P, Q, R коишто ја определуваат кружницата ω (опишаната кружница на триаголникот PQR).

Да ги разгледаме сега, рефлексиите α', β', γ' на кружниците α, β, γ на правите QR, RP, PQ , соодветно. Тие имаат исти радиуси r и нивните центри лежат на нормалите на страните $|QR|, |RP|, |PQ|$ коишто се сечат во ценатарот O на кружницата ω. Оттука следува дека кружниците α', β', γ' се совпаѓаат со кружницата ω.

Проблем 2. Колку пати е поголема плоштината на триаголникот $A_2B_2C_2$ од црт. 4 од плоштината на триаголникот ABC ?

Додавајќи го кон црт.4 триаголникот XYZ добиен од пресеците на заедничките тангенти на кружниците α, β, γ (црт. 5), од сличните триаголници BMY и INY лесно заклучуваме дека ABC и XYZ се сврзани со хомотетија чиј центар е заедничкиот центар I на кружниците впишани во триаголниците ABC и XYZ и чиј коефициент е $1 + \frac{r}{\rho}$, каде што r и ρ се радиусите на опишаната и впишаната кружница во триаголникот ABC , соодветно и M и N се ортогоналните проекции на B и I на правата XY .



Црт.5: Триаголниците ABC и XYZ

се сврзани со хомотетија $h(I, 1 + \frac{r}{\rho})$.

Литература

[1] M.Bator, Z.Čerin, M. Ćulav, *Analitička geometrija ravnine računalom*, Matematičko-fizički list, 54 (2003/2004), 36-47

[2] Crux mathematicorum with Mathematical Mayhem, Canada, 1997

[3] Arnold Emch, *Remarks on the foregoing circle theorem*, American Mathematical Montly, 23 (1916), 162-164

[4] Arnold Emch, *Rare problems in plane geometry*, Scripta Math., 16 (1950), 61-66

[5] L. Hann, *Complex numbers and gemoetry*, Mathematical Association of America, Washington, 1994

[6] Ross Honsberger, *Epizodes in nineteenth and twentieth century Euclidian geometry*, the Mathematical Association of America, New Mathematical library no. 37 Washington, 1995

[7] R.A. Jonson, *A circle theorem*, American Mathematical Montly, 23 (1916), 161-162

[8] Roger A. Jonson, *Advanced Euclidian Geometry*, Dover Publ. Washington, 1964

[9] Clark Kimberling, *Encyclopedia of Triangle Centers,* 2000 (Internet address: http://cedar.evansville.edu/~ck6/encyclopedia/)

[10] Dominik Palman, *Trokut i kružnica*, Element, Zagreb, 1994.

[11] I.M.Yaglom, *Complex numbers in geometry*, Academic Press, New York, 1968.