

ФМС 2019
Категорија-ЈУНИОРИ

Охрид, 10.10.2019

1. Нека ABC е триаголник и нека D и E се точки на неговата опишана кружница, така што $D \in \widehat{AB}$, $E \in \widehat{AC}$ (помалите лаци) и $BD \parallel CE$. Нека пресекот на правите DA и CE е F , а пресекот на правите EA и BD е G . Нека P е вториот пресек на опишаните кружници на $\triangle ABG$ и $\triangle ACF$. Докажи дека правата AP минува низ средината на страната BC .

2. Нека $m = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2}$ и нека е даден полиномот $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, каде n е природен број, коефициентите $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ се природни броеви и $P(m) = 2018$. Докажи дека збирот $a_0 + a_1 + \dots + a_n$ е делив со 2.

3. Определи ги сите прости броеви p и q , $p \leq q$ за кои $pq \mid (5^p - 2^p)(7^q - 2^q)$.

4. Нека $n > 2$ е природен број. Скакулец се движи по страните на $n \times n$ квадратна шема, која е поделена на n^2 единелни квадратчиња. Тој се движи така што

- а) во секое 1×1 квадратче од шемата поминува низ само една страна
- б) кога ќе помине една страна од 1×1 квадратче од шемата, тој скока на теме на друго произволно 1×1 квадратче од шемата, кое нема страна по која скакулецот се движел.

Скакулецот се движи се додека се исполнети условите на задачата.

Кој е најкраткиот и најдолгиот пат кој може да го помине скакулецот движејќи се според условот на задачата?

Language: **Macedonian**

Време: 4 часа и 30 минути

Секоја точно решена задача се вреднува со 10 поени.

1. Let ABC be a triangle and let D and E are points on its circumscribed circle, such that $D \in \widehat{AB}$, $E \in \widehat{AC}$ (smaller arcs) and $BD \parallel CE$. Let the point F be the intersection of the lines DA and CE , and the intersection of the lines EA and BD is G . Let P be the second intersection of the circumscribed circles of $\triangle ABG$ and $\triangle ACF$. Prove that the line AP passes through the middle point of the side BC .

2. Let $m = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2}$. Let the polynomial $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ is given, where n is a positive integer, the coefficients $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ are positive integers and $P(m) = 2018$. Prove that the sum $a_0 + a_1 + \dots + a_n$ is divisible by 2.

3. Determine every prime numbers p and q , $p \leq q$ for which $pq \mid (5^p - 2^p)(7^q - 2^q)$.

4. Let $n > 2$ be a positive integer. A grasshopper is moving along the sides of an $n \times n$ square net, which is divided on n^2 unit squares. It moves so that

- a) in every 1×1 unit square of the net, it passes only through one side
- b) when it passes one side of 1×1 unit square of the net, it jumps on a vertex on another arbitrary 1×1 unit square of the net, which does not have a side on which the grasshopper moved along.

The grasshopper moves until the conditions can be fulfilled.

What is the shortest and the longest path that the grasshopper can go through if it moves according to the condition of the problem? Calculate its length and draw it on the net.

Language: **English**

Time: 4 hours and 30 minutes
Each problem is worth 10 points

1. ABC üçgeninin çevrel çemberi üzerinde bulunan ve $BD \parallel CE$ şartını sağlayan D ve E noktaları, sırasıyla AB ve AC minör (küçük) yayları üzerindedir. DA ve CE doğrularının kesişim noktası F , EA ve BD doğrularının kesişim noktası G olsun. $\triangle ABG$ ve $\triangle ACF$ nin çevrel çemberlerinin ikinci kez kesiştiği nokta P olsun. AP doğrusunun BC kenarının orta noktasından geçtiğini gösteriniz.

2. $m = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2}$ olsun. $P(m) = 2018$ ve $n, a_0, a_1, \dots, a_n$ ler pozitif tam sayılar olacak şekilde $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ polinomu verilsin. $a_0 + a_1 + \dots + a_n$ toplamının 2 ile tam bölünebildiğini gösteriniz.

3. $p \leq q$ olmak üzere $pq \mid (5^p - 2^p)(7^q - 2^q)$ şartını sağlayan tüm p, q asal sayı çiftlerini belirleyin.

4. $n > 2$ pozitif tam sayıdır. Bir çekirge n^2 tane birim kareden oluşan $n \times n$ lik kare şeklindeki bir ağın birim karelerinin kenarları üzerinde hareket ediyor.

a) her bir 1×1 birim karenin sadece bir kenarından geçiyor.

b) 1×1 lik bir birim karenin bir kenarını bitirdikten sonra sonra henüz hiçbir kenarını bitirmediği başka bir 1×1 lik birim karenin bir köşesine sıçırıyor.

Çekirge artık hareket edecek bir birim kare kalmayana kadar hareketine devam ediyor.

Çekirgenin bu şartlara uygun hareket ederek alabileceği en uzun ve en kısa yolu belirleyin. -Bu uzunluğu hesaplayınız, örnek yolu çiziniz-.

Language: **Turkish**

Sınav süresi 4 saat 30 dakikadır.

Her soru 10 puanlık