

**Ристо Малчески**  
**Самоил Малчески**

# **ОПЕРАЦИОНИ ИСТРАЖУВАЊА**

**Скопје, 2019**

Д-р Ристо Малчески, професор на ФОН универзитет, Скопје  
Д-р Самоил Малчески, доцент на Славјански универзитет, Скопје  
ОПЕРАЦИОНИ ИСТРАЖУВАЊА

Рецензенти:

Д-р Катерина Аневска, доцент на ФОН универзитет, Скопје  
Д-р Алекса Малчески, професор на Машински факултет, Скопје

CIP - Каталогизација во публикација  
Национална и универзитетска библиотека "Св. Климент Охридски", Скопје

519.8

МАЛЧЕСКИ, Ристо

Операциони истражувања / Ристо Малчески, Самоил Малчески. -  
Скопје : Армаганка, 2020. - 346 стр. ; 25 см

Библиографија: стр. 337-338. - Регистар. - Содржи и: Додаток А

ISBN 978-608-4904-73-1

1. Малчески, Самоил [автор]

а) Операциони истражувања

COBISS.MK-ID 111967498

Без одобрение на авторите или издавачот не е дозволено репродуцирање на оваа книга или на било кој нејзин дел.

# СОДРЖИНА

## ПРЕДГОВОР

vii

## ГЛАВА I

### МОДЕЛИ НА ЗАЛИХИ

1. Поим за залихи. Видови залихи	1
2. Видови трошоци на залихи	2
3. Детерминистички модели на залихи	4
3.1. Модел на залихи со константна побарувачка и фиксен временски период	4
3.2. Модел на залихи со константна побарувачка, фиксен временски период и променлива набавна цена	9
3.3. Модел на залихи со константна побарувачка и итни набавки	12
3.4. Модел на залихи со константна побарувачка и рамномерно набавување	15
4. Стохастички модели на залихи	19
4.1. Стохастички модел со дискретна распределба на побарувачката	20
4.2. Стохастички модел со непрекината распределба на побарувачката	22
4.3. Дискретен стохастички модел со константен интензитет на побарувачка	24
4.4. Непрекинат стохастички модел со константен интензитет на побарувачка	28
5. Задачи	31

## ГЛАВА II

### МРЕЖНО ПЛАНИРАЊЕ

1. Вовед	35
2. Анализа на структурата	36
2.1. Елементи на мрежниот дијаграм	37
2.2. Правила за конструирање на мрежен дијаграм	38
2.3. Конструкција и нумерирање на мрежниот дијаграм	40
3. Анализа на времето	43
3.1. СРМ метод	44
3.2. PERT метод	49
4. Анализа на средствата	52
4.1. Оптимизација на односот време-работна сила	53
4.2. Оптимизација на времетраењето на проектот	56
4.3. Оптимизација на односот време-трошоци	58
5. Задачи	63

## ГЛАВА III

### ИЗБОР И ЗАМЕНА НА СРЕДСТВА ЗА РАБОТА

1. Избор на средство за работа	67
1.1. Избор на средство за работа при дискретно вкатување	67
1.2. Избор на средство за работа при непрекинати трошоци за одржување	72
2. Модели на замена	76
2.1. Модел на замена со континуирани трошоци на одржување	77
2.2. Модел на поединечна замена во еднакви периоди	78
2.3. Модел на групна замена во еднакви периоди	81
3. Задачи	83

## ГЛАВА IV

### ВЕРИГИ И ПРОЦЕСИ НА МАРКОВ

1. Поим за верига на Марков. Основни својства	85
2. Стационарни вериги на Марков	88
3. Класификација на состојбите на конечните вериги на Марков	92
4. Ергодична теорема за конечни вериги на Марков	102
5. Процеси на Марков	107
5.1. Процеси на Марков со пребројливо многу состојби	107
5.2. Процеси на Марков со конечно многу состојби	111
5.3. Пуасонов процес	114
5.4. Процеси на раѓање и умирање	116
6. Задачи	122

## ГЛАВА V

### МАСОВНО ОПСЛУЖУВАЊЕ

1. Вовед	131
2. Тек на доаѓања	132
3. Време на опслужување	135
4. Функција на трошоци	136
5. Елементарни системи за масовно опслужување	138
5.1. Систем со една станица и неограничен број клиенти	138
5.2. Систем со повеќе станици и неограничен број клиенти	143
5.3. Систем на самопслужување	147
5.4. Систем со една станица и ограничен број клиенти	149
5.5. Систем со повеќе станици и ограничен број клиенти	151
6. Задачи	155

## ГЛАВА VI

### ВЕКТОРСКИОТ ПРОСТОР $\mathbf{R}^m$

1. Поим за векторски простор	161
2. Потпростори	163
3. Линеарна зависност	164
4. База и димензија на векторски простор	167
5. Отворени и затворени множества во $\mathbf{R}^m$	170



6. Конвексни множества во $\mathbf{R}^m$	173
7. Теореме за раздвојување	177
8. Екстремални точки	179
9. Конвексни функции	184
10. Максимално линеарно независна подфамилија. Ранг на матрица	187
11. Систем линеарни равенки	192
12. Решавање на систем линеарни равенки	196
13. Својства на решенијата на систем линеарни равенки	201
14. Систем линеарни неравенки	204
15. Задачи	206

## **ГЛАВА VII ОСНОВИ НА ЛИНЕАРНОТО ПРОГРАМИРАЊЕ**

1. Формулација на задачата на линеарното програмирање (ЛП задача)	211
2. Математичко формулирање и интерпретација на некои задачи од поопшт тип	214
2.1. Планско – производствена задача	214
2.2. Транспортна задача	217
2.3. Задача на оптимални смеси (диета)	218
2.4. Задачи за оптимални раскројување на материјали	220
2.5. Задачи од областа на финансиите	221
3. Основни својства на ЛП задачите	224
4. Графички метод за решавање на ЛП задачите	228
5. Задачи	233

## **ГЛАВА VIII СИМПЛЕКС МЕТОД**

1. Вовед	237
2. Трансформација на ЛП задачите	238
3. Симплекс метод	240
3.1. Алгоритам на симплекс методот	250
3.2. Симплекс метод со вештачки променливи	256
3.3. Дегенерација и циклус	262
4. Задачи	264

## **ГЛАВА IX ТРАНСПОРТНА ЗАДАЧА**

1. Дефиниција и основни својства на транспортната задача	269
2. Почетно базно решение	275
2.1. Метод на северозападен агол	275
2.2. Метод на минимален елемент	276
2.3. Метод на Вогел	278

3.	Методи за оптимизација на почетното базно решение	280
3.1.	Метод на потенцијали	280
3.2.	Метод на скокање од камен на камен	284
4.	Дегенерација на транспортната задача	290
5.	Метод на распоредување (асигнација)	292
5.1.	Алгоритам за решавање на проблемот на распоредување	293
5.2.	Отворен проблем на распоредување	297
6.	Задачи	299

## **ГЛАВА X**

### **ДУАЛНОСТ ВО ЛИНЕАРНОТО ПРОГРАМИРАЊЕ**

1.	Формулација на дуалната ЛП задача	305
2.	Основни својства на дуалните задачи	307
3.	Решени примери	311
4.	Дуална транспортна задача	313
5.	Економска интерпретација на парот заемно дуални задачи	315
6.	Задачи	319

## **ГЛАВА XI**

### **ЕЛЕМЕНТИ ОД ТЕОРИЈАТА НА ИГРИ**

1.	Основни поими	323
2.	Елементи од von Neumann-овата теорија на игри	324
3.	Алгоритам за решавање игри	326
4.	Решени примери	329
5.	Задачи	332

Таблица на нормална распределба	335
---------------------------------	-----

Литература	337
------------	-----

Додаток А – Рецензија од октомври 1986 година на необјавен ракопис под наслов <i>Основи на квантитативни методи</i>	339
--	-----

Индекс на поими	343
-----------------	-----

## ПРЕДГОВОР

Ниедно истражување на човекот не може да се нарече вистинска наука, ако истото не е поткрепено со математички доказ.

Проблематична е веродостојноста на тврдењата во науките, каде нема примена на ниту една математичка дисциплина, т.е. кои не се поврзани со математиката.

Леонардо да Винчи

Оваа книга е наменета за предметот Операциони истражувања, кој е застапен на економските факултети, но и на повеќето технички факултети, а особено на факултетите за информатика. Во неа се разработени содржините кои се најзастапени во повеќето факултетски курсеви, а посебно на Факултетот за економски науки и Факултетот за информатика на ФОН универзитетот. Книгата е поделена на еднаесет глави и тоа:

- Модели на залихи,
- Мрежно планирање,
- Избор и замена на средства за работа,
- Вериги и процеси на Марков,
- Масовно опслужување,
- Векторскиот простор  $\mathbf{R}^m$ ,
- Основи на линеарното програмирање,
- Симплекс метод,
- Транспортна задача,
- Дуалност во линеарното програмирање и
- Елементи од теоријата на игри.

Во првата глава прво е воведен поимот залихи и се разработени видовите залихи, за да по воведувањето на видовите трошоци за чување на залихите, детално се разработени повеќе детерминистички и стохастички модели залихи. Притоа, за сите модели се дадени детални докази на користените релации и за секој модел е решен најмалку по еден пример.

Втората глава, која е посветена на мрежното планирање е концепирана така да е избегнато директното користење на теоријата на графови, што значи дека разработката исклучиво е насочена на двополовите мрежи, протоците низ мрежите и усвојување на CPM и PERT методата. Притоа, на крајот од оваа глава се да-

дени три оптимизациони алгоритми, кои се однесуваат на оптимизација на време-траењето на проектот, односот време – работна сила и односот време – трошоци.

На почетокот на третата глава се разработени два модели за избор на средства за работа, и тоа при дискретно вкватување и избор при непрекинати трошоци за одржување. Во продолжение се разработени трите најчесто користени модели на замена на средствата за работа, чија примена, слично како и за останатите модели е илустрирана со примери.

Четвртата глава е посветена на веригите и процесите на Марков и таа всушност е теориската основа за петтата глава во која се разработени одбрани модели на масовното опслужување. Така, во оваа глава детално е разработена класификацијата на состојбите на конечните вериги на Марков и се дадени примени на истите во донесувањето на одлуки, но исто така детално се разработени Пуасоновниот процес и процесите на раѓање и умирање. Да забележиме, дека во теориските разгледувања некои теореми се презентирани без докази, со што на прв поглед се осиромашува содржината на разработуваниот материјал, но истите се изоставени пред се заради нивната тежина и апстрактност.

Петтата глава е посветена на масовното опслужување, па затоа најпрво се разработени текот на доаѓање, времето на опслужување и функцијата на трошоци, за да потоа користејќи ги економските параметри се разработени најчесто користените системи на масовно опслужување. Притоа, за секој систем на масовно опслужување е решен најмалку по еден пример, при што во донесувањето на одлуки се користи функцијата на трошоци, односно е покажано дека одлуките треба да се донесуваат врз основа на реални економски критериуми.

Во шестата глава се разработени основните поими за просторот  $\mathbf{R}^m$  при што, во функција на разгледувањата кои следат до крајот на книгата, посебно внимание е посветено на конвексните множества, теоремите за раздвојување, екстремалните точки и системите линеарни равенки и неравенки. Изборот на содржините од теоријата на векторски простори и направен заради несметано усвојување на линеарното програмирање и теоријата на игри.

Седмата, осмата, деветтата и десеттата глава се посветени на линеарното програмирање, при што во одделните глави се разработуваат засебни делови од оваа теорија. Притоа, во главата посветена на транспортната задача е разгледан проблемот на распоредување и е разработен Унгарскиот метод за решавање на истиот. Што се однесува до решавањето на ЛП задачите, важно е да споменеме дека во оваа книга нема посебна разработка на таканаречената симплекс табела, туку истата се користи при проучувањето на Симплекс методот. Со тоа, не само што излагањата се конзистентни, туку е избегнато и непотребно повторување на содржините, бидејќи според наше мислење интегралното усвојување на определен метод е предуслов за стекнување на трајни знаења.

Последната глава е посветена на теоријата на игри, при што се разработени матричните игри со сума нула и матричните игри со ненулта сума. Притоа е докажана теоремата за  $\min\max$  на von Neumann, а додека основната теорема на

von Neumann-овата теорија на игри е презентирана без доказ. При разработката на алгоритмот за решавање на матрични игри најпрво е презентиран методот за наоѓање на седлеста точка, а потоа е даден алгоритмот за решавање на матрични игри со нулта сума со помош на линеарното програмирање. При решавањето на матричните игри со нулта сума се изоставени одделни парцијални методи, како што се решавањето на игри со  $2 \times 2$ ,  $m \times 2$  и  $2 \times n$  стратегии, како и методот на редукција на матрицата на плаќања, бидејќи истите даваат можност за решавање на игри од специјален вид, а додека со помош на линеарното програмирање може да се реши секоја матрична игра со нулта сума.

Овде сакаме да споменеме дека разработката на одделни содржини застапени во оваа книга не се одликува со ригидна математичка строгост. Последното се должи пред сè на фактот дека книгата е наменета за студенти кои студираат економија, менаџмент и технички науки, за кои поважни се пресметковните алгоритми отколку аксиоматското изложување на разработуваните содржини.

Во текот на изложувањето на материјалот посебно внимание е посветено на воведувањето на поимите при што во одделни глави истите се истакнати во посебни дефиниции, а додека во останатите делови новите поими се дадени во интегралниот текст. Во книгата се презентирани поголем број тврдења, дел од кои се оформени како теореми, лемии и последици, но голем број тврдења не се нагласени во ваква форма, туку се содржат во интегралниот текст на книгата. Ова посебно се однесува на тврдењата во главите I – III и V. Понатаму, изложувањето на материјалот е пропратено со бројни забелешки и коментари, кои се дадени во функција на дообјаснување како на воведените поими, така и на презентирани тврдења. Усвојувањето на која било математичка дисциплина не е можно без решавање на бројни примери. Затоа во сите делови на книгата теориските разгледувања се пропратени со повеќе решени примери, ги има вкупно 98, како и 184 задачи за самостојна работа

На крајот од книгата е дадена таблицата на нормална распределба, која е неопходна за примена на PERT методата, дел од користената литература, како и индекс на поими, со што се надеваме ќе се олесни користењето на оваа книга, но и на читателот ќе му овозможи да консултира дополнителна сродна литература, која пред сè е пишувана со ист или сличен методски пристап. Нестандардно за било која книга, во Додаток А е дадена усвоената рецензија од октомври 1986 година на необјавениот ракопис под наслов *Основи на квантитативни методи*, во која првиот автор на оваа книга е коавтор. За жал, овој ракопис не се отпечати во изворната форма и по 4 години од неговото усвојување, без никакви измени на разработуваните содржини, се појави под наслов *Квантитативни методи*, во кој од неразбирливи причини беше изоставено името на првиот автор на овој учебник. Оттука, основа за пишување на оваа книга беше токму споменатиот необјавен ракопис, па затоа истата може да се каже дека е второ изменето и дополнето издание на ракописот *Основи на квантитативни методи*, во кое се изоставен дел од главата Елементи од теоријата на веројатност и истата е заменета со главата Вериги и процеси на Марков, за која сметаме дека е посоодветна за проучување на масовното опслужување, но и заради фактот дека останатите делови од теоријата на веројатност студентите ги усвојуваат во предметот Статистика за бизнис и дека

истите се подетално разработени во книгата Статистика за бизнис и економија, напишана од истите автори. Исто така, во ова издание, во кое е променет и редоследот на одделните делови, значителни промени и дополнувања се направени во деловите: модели на залихи, масовно опслужување и векторскиот простор  $\mathbf{R}^m$ , а додека во останатите делови се извршени определен број дополнувања, при што во третата глава е додаден делот избор на средства за работа.

За оформувањето на оваа книга особена заслуга имаат рецензентите проф. проф. д-р Зоран Гацовски и проф. д-р Лидија Горачинова, кои со своите сугестии влијааа на конечната верзија на ракописот, за што им искажуваме посебна благодарност. Секако, не помала заслуга имаат и колешките м-р Катерина Аневска и м-р Вера Малческа, кои детално го прочитаа ракописот со што придонесоа да се отстранат техничките грешки и да се подобри изложувањето на одделни содржини.

Се надеваме дека книгата ќе им биде од корист како на студентите, за кои пред сè истата е наменета, така и на поширок круг читатели, кои секојдневно се среќаваат со материјата која е предмет на разработка.

И покрај вложениот напор, свесни сме за можните подобрувања во изложувањето на разработуваниот материјал и за пропустите кои ги содржи оваа книга. Затоа сме однапред благодарни на секоја добронамерна сугестија и критика, која ќе овозможи подобрување на книгата.

Јануари, 2015  
Скопје

Авторите

## ЛИТЕРАТУРА

1. Backović, M.; Vuleta, J.: *Ekonomsko matematički metodi i modeli*, Ekonomski fakultet, Beograd, 2007
2. Bazaraa, M.; Sherali, H.; Shetty, C.: *Nonlinear Programming, Theory and Algorithms*, Wiley, New York, 1993
3. Blumenfeld, D.: *Operations Research, Calculations Handbook*, CRC Press, 2009
4. Bramel, J.; Simchi-Levi, D.: *The Logic of Logistics: Theory, Applications for Logistics Management*, Springer-Verlag, Heidelberg London New York, 1999
5. Denardo, S.: *Dynamic Programming Theory and Applications*, Prentice Hall, Upper Saddle River, New York, 1982
6. Drnovšek, R.; Tomaž, K.; Kramar, E.; Lešnjak, G.: *Zbirka rešenih nalog iz verjetnostnega računa*, DMFA Slovenije, Ljubljana, 1998
7. Evans, J. R.; Minieka, E.: *Optimization Algorithms for Networks and Graphs*, Marcel Dekker, New York, 1992
8. Fiacco, A. V.; McCormick, G. P.: *Nonlinear Programming*, John Wiley and Sons, Inc., New York, 1968
9. Ivković, Z.: *Matematička statistika*, Naučna knjiga, Beograd, 1975
10. Jorge Nocedal, J.; Wright, S. J.: *Numerical Optimization*, Springer-Verlag New York, 1999
11. Kaufmann, A.; Faure, R.: *Introduction to Operations Research*, Academic Press, London – New York, 1968
12. Lasserre, J. B.: *Linear and Integer Programming vs Linear Integration and Counting*, Springer-Verlag, Heidelberg London New York, 2009
13. Lee, A.: *Applied Queuing Theory*, St. Martin's Press, New York, 1966
14. Luenberger, D. G.; Ye, Y.: *Linear and Nonlinear Programming*, Springer, Springer-Verlag, Heidelberg London New York, 2008
15. Mališić J. D.: *Zbirka zadataka iz teorije verovatnoće sa primenama*, Građevinska knjiga, Beograd, 1989
16. Nering, E.; Tucker, A.: *Linear Programming and Related Problems*, Academic Press, Boston, 1992
17. Pauše, Ž.: *Vjerojatnost*, Školska knjiga, Zagreb, 1978
18. Ralević, R.: *Finansiska i aktuarska matematika*, Savremena administracija, Beograd, 1975
19. Saaty, T.: *Elements of Queuing Theory with Applications*, Dower, New York, 1983
20. Smythe, W. R.; Johnson, L. A.: *Introduction to Linear programming with Applications*, Prentice – Hall, Inc., New Jersey, 1966
21. Stewart, W.: *Introduction to the Numerical Solution of Markov Chains*, Princeton University Press, Princeton, 1995
22. Stroock, D. W.: *An Introduction to Markov Processes*, Springer – Verlag, Berlin Heidelberg, 2005
23. Vadnal, A.: *Linearno programiranje – teorija i upotreba u privredi*, Informator, Zagreb, 1980
24. Vanderbei, R. J.: *Linear Programming*, Springer-Verlag, Heidelberg London New York, 2008
25. Vujčić, V.; Ašić, M.; Miličić, N.: *Matematičko programiranje*, Matematički institute, Beograd, 1980

26. William, H.: *Model Building in Mathematical Programming*, Wiley, New York, 1994
27. Wolsey, L.: *Integer Programming*, Wiley, New York, 1998
28. Zipken, P.: *Foundations of Inventory Management*, McGraw – Hill, Boston, 2000
29. Абрамов, Л. М.; Капустин, В. Ф.: *Математическое программирование*, Ленинград, 1981
30. Данцинг, Д.: *Линейно програмирање и негово приложение*, Държавно издателство, Варна, 1973
31. Елстер, К. Х.; Рейхгардт, Р.; Шойбле, М.; Донат, Г.: *Введение в нелинейное программирование*, Наука, Москва, 1985
32. Еремин, И. И.; Мазуров, В. Д.; Астафьев, Н. Н.: *Несобственные задачи линейного и выпуклого программирования*, Наука, Москва, 1983
33. Зуховицкий, С. И.; Авдеева, Л. И.: *Линейное и выпуклое программирование*, Наука, Москва, 1967
34. Зуховицкий, С. И.; Радчик, И. А.: *Математические методы сетевого планирования*, Наука, Москва, 1965
35. Канторович, Л. В.; Горстко, А. Б.: *Оптимальные решения в экономике*, Наука, Москва, 1972
36. Карманов, В. Г.: *Математическое программирование*, Наука, Москва, 1984
37. Карчиска, Д. Л.; Коробар, Д. П.: *Основи на линеарно програмирање*, Унив. “Св. Кирил и Методиј”, Скопје, 1974
38. Коваленко, И. Н.; Филипова, А. А.: *Теория вероятностей и математическая статистика*, Высшая школа, Москва, 1973
39. Ларионов, А. И.; Юорченко, Т. И.: *Экономико – математические методы в планировании*, Высшая школа, Москва, 1984
40. Малчески, Р.; Малческа, В.: *Теорија на веројатност*, ФОН универзитет, Скопје, 2010
41. Малчески, Р.; Малчески, С.: *Математика за бизнис*, ФОН универзитет, Скопје, 2010
42. Малчески, Р.; Малчески, С.: *Статистика за бизнис и економија*, ФОН универзитет, Скопје, 2010
43. Малчески, Р.; Малчески, С.: *Финансиска математика*, ФОН универзитет, Скопје, 2010
44. Михалевич, В. С.; Гупал, А. М.; Норки, В. И.: *Методы невыпуклой оптимизации*, Наука, Москва, 1987
45. Михалевич, В. С.; Кукса, А. И.: *Методы последовательной оптимизации*, Наука, Москва, 1983
46. Речкоски, Н.: *Веројатност*, Факултет за туризам и угостителство, Охрид, 1998
47. Севастьянов, Б. А.: *Курс теории вероятностей и математической статистики*, Наука, Москва, 1982
48. Стојаноски, З.; Малчески, Р.: *Теорија на игри*, Годишник на Економски факултет, Прилеп, 1983
49. Таха, Х.: *Операциони истражувања*, Магор, Скопје, 2010
50. Тлегинов, К. Б.; Калчаев, К. К.; Заплетин, П. П.: *Методы математического программирования*, Наука, Алма-Ата, 1975
51. Тодосиоска, Б.: *Наука за менаџмент*, Економски факултет, Скопје, 2001
52. Цветковиќ, Д.; Шокаровски, Р.: *Основи на теоријата на графови*, Математички институт, УКИМ, Скопје, 1975



# ДОДАТОК А

## СОДРЖИНА

Страна

РЕФЕРАТИ ЗА ИЗБОР И РЕИЗБОР НА НАСТАВНИЦИ И СОРАБОТНИЦИ,  
РЕЦЕНЗИИ ЗА ИЗДАВАЊЕ НА УЧЕБНИЦИ И ДОКТОРСКИ ДИСЕРТАЦИИ

### ЕКОНОМСКИ ФАКУЛТЕТ-ПРИЛЕП

1. Оценка на докторската дисертација под наслов "Диференци  
равенки во моделирање на некои економски појави" ..... 1  
М-Р БОРИС МИРЧЕСКИ
2. Оценка на докторската дисертација под наслов "Економскиот  
и социјалниот развој на СР Македонија по општини и региони  
од аспект на рангирањето на статистичките структури со  
помош на растојанијата меѓу истородните статистички ком-  
плексии" ..... 12  
М-Р МЛУНЕ ГЕОРГИЕВСКИ

3. Рецензија на ракописот под наслов: "Основи на квантита-  
тивни методи" ..... 27  
Д-Р ЗДРАВКО СТОЈАНОВСКИ  
РИСТО МАЛЧЕСКИ

### ПРАВЕН ФАКУЛТЕТ - БИТОЛА

1. Реферат за избор на наставник во сите звања по предметот  
Управно право со управна постапка..... 31  
Д-Р ЈОСИФ ТАЛЕВСКИ

### ФАКУЛТЕТ ЗА ТУРИЗМ И УГОСТИТЕЛСТВО - ОХРИД

1. Реферат за избор на наставник по предметот Економика на  
сообраќајот ..... 38  
ХАБ. ДОЦ. БОДЕНИЧАРОВСКИ КРСТЕ
2. Реферат за избор на наставник по предметот Германски јазик  
за прва и трета година ..... 41  
ИВАНКА КРЕЧОВА
3. Реферат за избор на наставник по предметот Туристичка  
географија и Регионална географија со туристички регии... 43  
Д-Р НАУМЕ МАРИНОСКИ

## РЕЦЕНЗИЈА

на ракописот под наслов: "Основи на квантитативни методи од авторите проф. д-р Здравко Стојаноски и Ристо Малчески - Економски факултет - Прилеп.

Заблагодарувајќи се на Наставно-научниот совет на Економскиот факултет во Прилеп што, на својата редовна седница одржана на 29.09.1986 година не избра во Рецензентска комисија за оценка на поднесениот ракопис за постојан универзитетски учебник по предметот Основи на квантитативни методи, поднесен од проф. д-р Здравко Стојаноски и Ристо Малчески, чест ни е да го поднесеме следниов

## ИЗВЕШТАЈ

Поднесениот ракопис за објакнување во вид на постојан универзитетски учебник по "Основи на квантитативни методи", е наменет за студентите на трета студиска година од Економскиот факултет во Прилеп.

Поднесениот ракопис носи наслов: "Основи на квантитативни методи" и содржи вкупно 384 страници. Општа карактеристика на ракописот е што теоретското изложување на материјата е пропратено со голем број на решени примери и слики што овозможува полесно совладување на истата. Исто така, на крајот од секое поглавје во ракописот е даден избор на нерешени задачи кои корисно о можат да му послужат на читателот во совладувањето на материјата.

Самиот ракопис е прилагоден на наставниот план и програм по предметот Основи на квантитативни методи кој се изучува на третата студиска година на Факултетот. Истиот се состои од три дела во кои се обработени тринаесет поглавја.

Првиот дел од ракописот носи наслов ЛИНЕАРНО ПРОГРАМИРАЊЕ И ТЕОРИЈА НА ИГТИ. Во истиот се обработени седум поглавја на вкупно 174 страници.

Вториот дел од ракописот носи наслов ЕЛЕМЕНТИ НА ТЕОРИЈАТА НА ВЕРОЈАТНОСТ. Случајни процеси и елементи на теоријата на масовно услужување и истиот содржи 110 страници.

Третиот дел од ракописот носи наслов: "МРЕЖНО ПЛАНИРАЊЕ.

Модели на залихи и методи на замена и содржи 80 страници.

Во првиот дел од ракописот се обработени поглавјата:

1. ВЕКТОРСКИ ПРОСТОРИ- МАТРИЦИ
2. ЕЛЕМЕНТИ НА КОНВЕКСНАТА АНАЛИЗА
3. ОПШТА ЗАДАЧА НА ЛИНЕАРНОТО ПРОГРАМИРАЊЕ
4. СИМПЛЕКС МЕТОДА
5. ТРАНСПОРТНА ЗАДАЧА НА ЛИНЕАРНОТО ПРОГРАМИРАЊЕ
6. ДУАЛНОСТ ВО ЛИНЕАРНОТО ПРОГРАМИРАЊЕ
- и 7. ТЕОРИЈА НА ИГРИ.

Овој дел се карактеризира со тоа што покрај прецизното изложување на материјата и строгото дефинирање на поимите и докажување на тврдењата во истиот, посебно внимание е посветено на примената на линеарното програмирање и теоријата на игри во економијата. Имено, сите решени примери се задачи со кои илните економисти ќе се среќаваат во праксата, а посебно внимание е посветено на некои специфични економски задачи, како што се: Планско производствената задача, задачата на оптимални смеси, задачата на оптимално раскројување на материјалите, Транспортната задача, како и на економската интерпретација на парот взаемно дуални задачи.

Обработката на овој дел придонесува студентите да ја совладаат теоријата на линеарното програмирање и можностите за нејзина примена во планирањето во организациите на здружен труд на низа економски процеси. Поголавјето Теорија на игри од овој дел на ракописот на студентите им овозможува да се запознаат со теоријата на стратешки игри и можностите за нивната примена во решавањето на конфликтните ситуации на реалните економски процеси.

Општо земено, сите поглавја од првиот дел се обработени на сличен начин. Во секое поглавје после теоретското излагање, кое е пропратено со низа корисни сугестии и слики, следуваат решени примери во кои е образложено реалното значење на добиените резултати и меѓуре-зултати, а на крајот се задаваат задачи за вежи со чие решавање студентот самостојно може да ги провери своите знаења од соодветното поглавје.

Во вториот дел од учебникот се обработени три поглавја чии наслови се содржани во насловот на делот. Како и во првиот дел од ракописот овде, покрај теоретското изложување на материјата, кое обилува со низа

теориски резултати, посебно во поглавјето ЕЛЕМЕНТИ НА ТЕОРИЈАТА НА БЕРОЈАТНОСТ, презентирани се низа решени примери, со кои авторите го дополнуваат теорискиот дел, исто така и голем број нерешени задачи предвидени за самостојна работа на студентите. И во овој дел посебно внимание е посветено на примената и можностите за примена во економијата на изложените методи и модели, посебно на можностите за примена на масовното услужување, од кое се разработени петте основни типови модели.

Во последниот, трет дел од ракописот, авторите ги разработиле поглавјата содржани во насловот на делот. Приодот кон разработката на материјата е ист како и во претходните два дела, со таа разлика што во овој дел најдетално е обработена примената на изложените методи и модели. Сите три поглавја од овој дел обилуваат со примери од праксата кои мошне умешно го дополнуваат теоретското излагање на материјата. Со нерешените задачи кои следуваат после секое поглавје авторите оставиле доволно простор за самостојна работа на студентите.

На крајот, би сакале да истакнеме дека во предложениот ракопис стручно и методолошки опстојно е разработена разгледуваната материја, па затоа со задолжителство му препорачуваме на Наставно-научниот совет на Економскиот факултет во Прилеп, да го одобри печатењето на овој ракопис во вид на постојан универзитетски учебник по Основи на квантитативни методи.

РЕЦЕНЗЕНТСКА КОМИСИЈА

1. Др. Томислав Зечевиќ с.р.
2. Др. Глигор Попоски с.р.

## ИНДЕКС НА ПОИМИ

### А

Административни трошоци, 3  
Активност, 37  
Алгоритам на Ford – Fulkerson, 42  
Апсорбирачка состојба, 92, 111

### Б

База на простор, 167  
Базен минор на матрица, 192  
Базна променлива, 203  
Базно решение, 203  
Брзина на раѓање, 117  
Брзина на умирање, 117

### В

Вектор на критериум на  
оптималност, 212  
Вектор на ограничувања, 212  
Вектор, 161  
Векторска форма на ЛП задача, 212  
Векторски вид на систем равенки, 192  
Верига на Марков, 85  
Веројатност за достигнување  
апсорпција, 99  
Веројатност за премин во  $n$  чекори, 86  
Веројатност за премин во време  $t$ , 107  
Веројатност на премин, 86  
Вештачка (фиктивна) база, 256  
Вештачка (фиктивна) променлива, 256  
Вкупна временска резерва на  
активност, 45  
Внатрешна точка на множество, 171

Вредност на игра, 325, 327  
Време на најкасно завршување на  
активност, 44  
Време на најкасно почнување на  
активност, 44  
Време на најкасно случување  
на настан, 44  
Време на најрано завршување  
на настан, 44  
Време на најрано почнување  
на активност, 44  
Време на најрано случување  
на настан, 44  
Временска резерва на настан, 45  
Втора канонична форма на  
ЛП задача, 213

### Г

Gray-Kudd постапка, 56  
Главен елемент, 246  
Главен ред, 246  
Главна (определувачка) колона, 245  
Графички метод, 228

### Д

Дегенерирано базно решене, 273  
Димензија на простор, 168  
Добри стратегии, 326, 327  
Допустливо решение (програм), 213  
Дуална задача, 305

### Е

Еквивалентни системи, 193  
Екстремална (аголна) точка, 179  
Ергодична верига, 97  
Ергодична состојба, 97  
Ергодична теорема за вериги на  
Марков, 102  
Ергодична теорема за процеси на  
Марков, 113  
Ерлангов процес на раѓање и  
умирање, 120  
Ефикасен систем на масовно

опслужување, 136  
 $\varepsilon$  – околина, 170

### З

Зависност на Марков, 85  
Завршен настан на активност, 37  
Завршен настан на мрежен дијаграм, 38  
Заемно дуални задачи, 305  
Залиха, 1  
Засилени трошоци за активност, 59  
Засилено времетраење на активност, 59  
Затворен полупростор, 177  
Затворен транспортен проблем, 256  
Затворена конвексна обвивка, 176  
Затворена топка, 172  
Затворена фамилија состојби, 92  
Затворено множество, 171  
Збир на вектори, 161

### И

Игра со ненулта сума, 323  
Игра со сума нула, 32323  
Излезен тек, 131  
Интензитет (брзина) на доаѓања  
(текот), 132, 134  
Интензитет (брзина) на  
опслужување, 136

### К

Конвексен полиедар, 182  
Конвексна комбинација, 175  
Конвексна обвивка, 175  
Конвексна функција, 184  
Конвексно множество, 173  
Конечна верига на Марков, 91  
Конечна состојба на побарувања во  
компанија, 100  
Конечно-димензионален простор, 168  
Конкавна функција, 184  
Конкурентски игри, 323  
Координати на вектор, 169  
Критичен настан, 45  
Критичен пат, 46

Критична активност, 46

### Л

Линеарна комбинација на вектори, 163  
Линеарна обвивка на множество, 163  
Линеарно зависни вектори, 163  
Линеарно независни вектори, 164

### М

$m$ -димензионална отворена топка, 170  
Максимално линеарно независно  
потфамилија, 188  
Матрица на веројатности за премин  
во време  $t$ , 107  
Матрица на веројатности на премин  
во  $n$  чекори, 87  
Матрица на густини на веројатност, 117  
Матрица на ограничувања, 212  
Матрица на систем, 193  
Матрица на транспортни трошоци, 270  
Матричен вид на систем линеарни  
равенки, 192  
Матрична форма на ЛП задача, 212  
Меѓусебно поврзани процеси, 35  
Метод на критичен пат, 44  
Метод на мрежно планирање, 35  
Метод на оценка и ревизија на  
програмот, 44  
Метод на пополни елиминација на  
Гаус-Жордан, 197  
Метод на растечка нумерација, 42  
Мешана форма на ЛП задача, 213  
Множество состојби на систем, 85  
Модел на арбитража на валути, 221  
Модел на кредитна политика, 221  
Моментална состојба, 111

### Н

Надворешна точка за множество, 171  
Најверојатно времетраење на  
активност, 49  
Настан, 37  
Недегенерирано базно решение, 273

Недопустливо решение (програм), 212  
Неефикасен систем на масовно  
опслужување, 136  
Независна временска резерва  
на активност, 46  
Независност, 115, 132  
Неконкурентски игри, 323  
Ненегативно решение, 202  
Неравенство на Јенсен, 185  
Неразложлива верига на Марков, 92  
Несиметрични дуални задачи, 307  
Нормални трошоци за активност, 59  
Нормално времетраење на  
активност, 59  
Нул-повратна состојба, 95  
Нулти елемент, 161

## О

Ограничено множество, 178  
Ограничено од горе множество, 178  
Ограничено од долу множество, 178  
Оптимално решение (програм) 213  
Оптимистичко времетраење на  
активност, 49  
Општа ЛП задача, 211  
Отворен транспортен проблем, 271  
Отворено множество, 171  
Отправни пунктови, 269  
Отсечка во просторот  $\mathbf{R}^m$ , 173  
Очекуван број премини до  
апсорпција, 99  
Очекувано време на најкасно  
завршување на активност, 50  
Очекувано време на најкасно  
почнување на активност, 50  
Очекувано време на најрано  
завршување на активност, 50  
Очекувано време на најрано почнување  
на активност, 50  
Очекувано време на повраток, 95  
Очекувано време на прв премин, 98  
Очекувано најкасно случување на  
настан, 50,  
Очекувано најрано случување на  
настан, 50

## П

Пазарни залихи, 2  
Периодична верига на Марков, 92  
Песимистичко времетраење на  
активност, 50  
План на транспортна задача, 270  
Повратна состојба, 95  
Потпорна хиперрамнина, 179  
Потпростор, 163  
Почетен настан на активност, 37  
Почетен настан на мрежен дијаграм, 38  
Прва канонична форма на  
ЛП задача, 213  
Преодна состојба, 95  
Пресметковни цени, 317  
Претходна активност, 36  
Приближни метод, 237  
Приемни пунктови, 256  
Примерна задача, 305  
Проект, 35  
Производ на вектор со број, 161  
Производни залихи, 1  
Просечен број клиенти во редот, 137  
Просечен број клиенти во  
системот, 137  
Просечен број слободни станици, 137  
Просечно време на клиентот  
во редот, 139  
Просечно време на клиентот во  
системот, 139  
Прост тек на доаѓање, 132  
Противречен систем, 193, 204  
Профил на множество, 179  
Процес на Марков со пребројливо  
многу состојби, 107  
Процес на раѓање и умирање, 117  
Процес на раѓање, 117  
Процес на умирање, 117  
Проширена матрица на систем, 193  
Пуасонов процес, 115, 116

## Р

Раб (граница) на множество, 171  
Рабна (гранична) точка на  
множество, 171  
Равенки на Чемпен –

Коломогоров, 86, 109  
Разгледувана активност, 36  
Разложување по базни вектори, 169  
Ранг на матрица, 188  
Ранг на фамилија, 188  
Реален векторски простор, 161  
Реална активност, 37  
Ред на чекање, 131  
Решение на систем, 193, 204  
Решлив систем, 204

## С

Сверна околина, 170  
Седлеста точка, 325  
Сепарабилност, 115, 132  
Симетрични дуални задачи, 306  
Систем диференцијални равенки на  
Колмогоров, 112  
Систем линеарни неравенски, 204  
Скалар, 161  
Скратена Пуасонова распределба, 121  
Следна активност, 36  
Слободна временска резерва на  
активност, 46  
Слободни променливи, 203  
Сложени процеси, 35  
Состојби комуницираат, 92  
Специјални методи, 237  
Спротивен елемент, 161  
Стабилна состојба, 111  
Стандардна форма на ЛП задача, 213  
Стационарна верига на Марков, 91  
Строго конвексна функција, 184  
Строго конкавна функција, 184

## Т

Тек на доаѓање, 132  
Теорема на von Neumann, 325, 326  
Теорема на Канторович, 280, 314  
Теорема на Кронекер-Капели, 195  
Точни методи, 237  
Транспортни трошоци, 3  
Тривијално решение на систем, 193  
Трошоци за магацински простор, 3  
Трошоци за порачка или набавка на

залихите, 2  
Трошоци за хитни или вонредни  
набавки, 3  
Трошоци за чување или држење на  
залихите, 3  
Трошоци заради губење доверба кај  
потрошувачите, 3  
Трошоци заради недостиг на залихи, 3  
Трошоци на капиталот, 3  
Трошоци предизвикани од застој или  
прекин на производство, 3

## У

Унгарски метод, 293  
Универзални методи, 237  
Условни вектори, 212  
Условно оптимално решение, 237

## Ф

Фактор на опслужување, 136  
Фамилија генерира потпростор, 167  
Фиктивна активност, 37  
Финални веројатности, 104  
Функција на трошоци, 137  
Функција на целта, 211

## Х

Хиперрамнина, 177  
Хомоген систем, 193  
Хомогена верига на Марков, 86  
Хомогеност, 115, 132

## Ц

Цени во сенка, 317