

ПИТАГОРОВИ ТРОЈКИ

Дефиниција 1. Решенијата на равенката

$$x^2 + y^2 = z^2 \quad (1)$$

$x, y, z \in \mathbb{N}$, ги нарекуваме *Питагорови тројки*. За Питагоровата тројка (x, y, z) ќе велиме дека е *примитивна* ако $\text{NZD}(x, y, z) = 1$.

Коментар. Ако за Питагоровата тројка (x, y, z) важи $d = \text{NZD}(x, y, z) > 1$, тогаш $(\frac{x}{d}, \frac{y}{d}, \frac{z}{d})$ е примитивна Питагорова тројка. Според тоа, за да ги определиме решенијата на равенката (1), доволно е да ги определиме само примитивните тројки (x, y, z) , а останатите решенија се од облик (kx, ky, kz) , $k \in \mathbb{N}$.

Теорема 1. Во множеството природни броеви равенката (1) има бесконечно многу решенија (x, y, z) такви што $\text{NZD}(x, y, z) = 1$ и истите се дадени со

$$x = u^2 - v^2, y = 2uv, z = u^2 + v^2, \quad (2)$$

каде што $u, v \in \mathbb{N}$, $\text{NZD}(u, v) = 1$, $u > v$ и u и v се со различна парност.

Доказ. Од условот следува дека x е непарен, y е парен и z е непарен број. Затоа, $2 \mid (x + y)$ и $2 \mid (z - x)$. Според тоа

$$\frac{z+x}{2} \cdot \frac{z-x}{2} = \left(\frac{y}{2}\right)^2 \quad (3)$$

каде $\frac{z+x}{2}$, $\frac{z-x}{2}$ и $\frac{y}{2}$ се природни броеви. Понатаму, $\text{NZD}(x, z) = 1$, бидејќи ако x и z имаат заеднички прост делител, тој е делител и на y , што противречи на претпоставката дека $\text{NZD}(x, y, z) = 1$. Ако $d = \text{NZD}(\frac{z+x}{2}, \frac{z-x}{2})$, тогаш $d \mid z = \frac{z+x}{2} + \frac{z-x}{2}$ и $d \mid x = \frac{z+x}{2} - \frac{z-x}{2}$ и како $\text{NZD}(x, z) = 1$ добиваме дека $d = 1$. Понатаму, ако искористиме дека производот на два заемно прости броеви е точен квадрат ако и само ако и двата броја се точни квадрати, од равенството (3) следува дека постојат u и v такви што

$$\frac{z+x}{2} = u^2, \quad \frac{z-x}{2} = v^2.$$

Според тоа, постојат u и v такви што важи (2). Ако $d \mid u$ и $d \mid v$, тогаш $d^2 \mid x$, $d^2 \mid y$ и $d^2 \mid z$, т.е. $d^2 = 1$. Значи, $\text{NZD}(u, v) = 1$. Конечно, од

$\text{NZD}(x, y, z) = 1$ следува дека u и v се со различна парност, а од $x > 0$ следува дека $u > v$.

Обратно, нека u и v се такви што важи (2), каде што $u, v \in \mathbb{N}$, $\text{NZD}(u, v) = 1$, $u > v$ и u и v се со различна парност. Тогаш

$$(u^2 - v^2)^2 + (2uv)^2 = (u^2 + v^2)^2,$$

т.е. со (2) е дадено решение на (1). Сега, од $u > v$ следува дека $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$. Понатаму, ако p е прост број таков што

$$p \mid d_1 = \text{NZD}(u^2 - v^2, 2uv, u^2 + v^2),$$

тогаш $p \mid (u^2 + v^2 + 2uv)$ и $p \mid (u^2 + v^2 - 2uv)$. Според тоа, $p \mid (u + v)^2$ и $p \mid (u - v)^2$, па затоа $p \mid u + v$ и $p \mid u - v$. Но, тоа значи $p \mid 2u$ и $p \mid 2v$ и како $\text{NZD}(u, v) = 1$ добиваме дека $p = 2$. Сега, u и v се со различна парност, па затоа $u^2 + v^2$ е непарен број, што противречи на $2 \mid (u^2 + v^2)$. Од добиената противречност следува $d_1 = 1$, т.е. $\text{NZD}(x, y, z) = 1$, што значи дека со (2) е дадено примитивно решение на (1). ■

Пример 1. Докажи, дека ако радиусот на кругот е непарен прост број, тогаш околу него можат да се опишат точно два нескладни примитивни Питагорови триаголници.

Решение. Ако

$$a = m^2 - n^2, b = 2mn, c = m^2 + n^2$$

е примитивна Питагорова тројка, тогаш радиусот на опишаниот круг на соодветниот триаголник е

$$r = \frac{1}{2}(a + b - c) = n(m - n).$$

Ако r е непарен прост број p , тогаш мора да биде

$$n = 1, m = p + 1, a = p(p + 2), b = 2(p + 1), c = p^2 + 2p + 1,$$

$$n = p, m = p + 1, a = 2p + 1, b = 2p(p + 1), c = 2p^2 + 2p + 2,$$

што значи дека можат да се опишат точно два нескладни примитивни Питагорови триаголници. ■

Пример 2. Нека x, y, z се природни броеви такви што

$$x^2 + y^2 = z^4 \text{ и } \text{NZD}(x, y) = 1.$$

Докажи дека $7 \mid xy$. Дали условот $\text{NZD}(x, y) = 1$ е потребен?

Решение. Условот $\text{NZD}(x, y) = 1$ е потребен. Навистина, на пример, за броевите $x = 15, y = 20$ и $z = 5$ важи $15^2 + 20^2 = 5^4$, но $7 \nmid 15 \cdot 20$.

Нека $\text{NZD}(x, y) = 1$ и x, y, z се такви да $x^2 + y^2 = z^4$. Тогаш од теорема 1 следува дека постојат природни броеви m и n такви што

$$x = m^2 - n^2, y = 2mn \text{ и } z^2 = m^2 + n^2.$$

Да претпоставиме дека $7 \nmid y$. Тоа значи дека $7 \nmid m$ и $7 \nmid n$. Но, квадрат на цел број кој не се дели со 7, при делење со 7 дава остаток 1, 2 или 4. Бидејќи ниту еден од збирите $1+2$, $1+4$ и $2+4$ не е еднаков на 1, 2 или 4 и не е делив со 7, од равенството $z^2 = m^2 + n^2$ следува дека броевите m и n при делење со 7 имаат еднакви остатоци, па затоа $7 \mid x = m^2 - n^2$. ■

Пример 3. Нека p, q и r се прости броеви и нека n е природен број таков што

$$p^n + q^n = r^2. \quad (4)$$

Докажи, дека $n = 1$.

Решение. Јасно, еден од трите броеви p, q и r е парен.

Ако $r = 2$, тогаш од равенството $p^n + q^n = 4$ следува $p = q = 2$ и $n = 1$.

Нека претпоставиме дека $p > q = 2$. Нека претпоставиме дека $n > 1$ е непарен број. Сега равенството (4) можеме да го запишеме во обликот

$$(p+2)(p^{n-1} - 2p^{n-2} + 2^2 p^{n-3} + \dots - 2^{n-2} p + 2^{n-1}) = r^2.$$

Понатаму,

$p^{n-1} - 2p^{n-2} + \dots - 2^{n-2} p + 2^{n-1} = 2^{n-1} + (p-2)(p^{n-2} + 2^2 p^{n-4} + \dots + 2^{n-3} p) > 1$ и $p+2 > 1$, па затоа мора двата множители да се еднакви на r . Сега од (4) следува $p^n + 2^n = (p+2)^2 = p^2 + 4p + 4$, што не е можно за $n \geq 3$.

Нека претпоставиме дека $n > 1$ е парен број и нека $n = 2m$. Сега равенството (4) можеме да го запишеме во обликот

$$(p^m)^2 + (2^m)^2 = r^2,$$

па од теорема 1 следува дека

$$p^m = a^2 - b^2, 2^m = 2ab \text{ и } r = a^2 + b^2,$$

за некои природни броеви a и b такви што $\text{NZD}(a, b) = 1$. Затоа a и b се степени на бројот 2, т.е. $b = 1$ и $a = 2^{m-1}$. Според тоа, $p^m = 4^{m-1} - 1 < 4^m$ и

бидејќи p е прост број добиваме дека единствена можност е $p=3$. Но, тогаш $3^m = 4^{m-1} - 1$, што очигледно не е точно за $m=1, 2, 3, 4$, а за $m \geq 5$ со индукција се докажува дека $4^{m-1} > 3^m + 1$.

Конечно, од претходните разгледувања следува дека $n=1$.

Примери на тројки прости броеви кои го задоволуваат условот на задачата се $p=7, q=2, r=3$; $p=23, q=2, r=5$ и $p=47, q=2, r=7$. ■

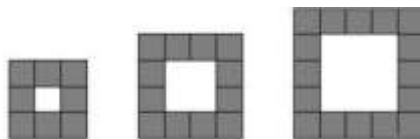
КОНКУРСНИ ЗАДАЧИ

4. ОДДЕЛЕНИЕ

3508. Во една бомбониера има 7 бомбони со вкус на чоколадо, 8 со вкус на ментол и 9 со вкус на јагода. Бомбоните се запаковани во исти опаковки. Кој е најмалиот број бомбони што треба да го земеме за да со сигурност меѓу нив има:

- а) барем три со ист вкус, б) барем три со различен вкус?

3509. Веселинка има квадратни плочки и со нив прави квадратни рамки (види цртеж). Колку плочки употребила Веселинка за да ја направи единаесеттата рамка?



3510. На отсечката AB избрана е точка C . Отсечката AB е 4 пати подолга од отсечката AC . Определи ги должините на отсечките AB и AC , ако должината на отсечката CB е 24 cm .

3511. Во долните равенства на различни букви соодветствуваат различни цифри, а на исти букви соодветствуваат исти цифри.

$$B + C + D = \overline{AA}, \quad \overline{AD} - C = \overline{EB}.$$

Која цифра соодветствува на буквата D ?

5. ОДДЕЛЕНИЕ

3512. Реши го бројниот ребус

$$\overline{MASTRIT} + \overline{ASTRIT} + \overline{STRIT} + \overline{TRIT} + \overline{RIT} + \overline{IT} + T = 6043856,$$

во кој на еднаквите букви соодветствуваат еднакви цифри, а на различните букви соодветствуваат различни цифри.

3513. На колку најмногу нули може да завршува производот

$$\overline{MA} \cdot \overline{TE} \cdot \overline{MA} \cdot \overline{TI} \cdot \overline{KA},$$

каде на различни букви им соодветствуваат различни цифри, а на исти букви им соодветствуваат исти цифри?