Шефкет Арсланагиќ, Сараево, БИХ

ЕДНА ЗАДАЧА ПОВЕЌЕ РЕШЕНИЈА

Познато е дека докажувањето на неравенства во математиката е особено важна и атрактивна активност. Но, често пати тоа не е ниту малку едноставна работа. Имено, потребно е да се знаат важни факти, како што се класични неравенства меѓу средините, неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц, неравенството на Бернули, Чебишев, Холдер, Минковски, Шур и други неравенства.

Секако треба да се усвојат и некои методи за докажување неравенства, како што е методот на замена, т.е. воведување нови променливи се со цел докажувањето на почетното неравенство да се поедностави.

Во натамошниот дел ќе дадеме три докази на неравенството:

$$(a+b)(a+c) \ge 2\sqrt{abc(a+b+c)}, \quad a,b,c>0\,. \tag{1}$$

Уверени сме дека поголемиот број потенцијални решавачи на оваа задача неравенството (1) ќе се обиде да го реши токму на начин како што е тоа покажано во првите два начини. Притоа идејата е даденото неравенство со идентични трансформации да се сведе на неравенство кое е очигледно точно. Јасно, ваквиот начин не е елегантен и атрактивен, но сепак тоа е доказ. Третиот начин ќе биде исклучително елегантен и краток, но како што ќе видиме во овој доказ се користи исклучително добра идеја.

Доказ 1. Имаме

$$\begin{aligned}
&(a+b)(a+c) \ge 2\sqrt{abc(a+b+c)} &&\Leftrightarrow\\
&(a+b)^2(a+c)^2 \ge 4abc(a+b+c) &&\Leftrightarrow\\
&(a^2+2ab+b^2)(a^2+2ac+c^2) \ge 4a^2bc+4ab^2c+4abc^2 &&\Leftrightarrow\\
&a^4+2a^3b+a^2b^2+2a^3c+a^2c^2+b^2c^2-2ab^2c-2abc^2 \ge 0 &&\Leftrightarrow\\
&a^2(a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc)-2abc(a+b+c)+b^2c^2 \ge 0 &&\Leftrightarrow\\
&a^2(a+b+c)^2-2a(a+b+c)bc+b^2c^2 \ge 0 &&\Leftrightarrow\\
&[a(a+b+c)-bc]^2 \ge 0,
\end{aligned}$$

и од точноста на последното неравенство следува точноста на неравенството (1). Јасно, во (1) знак за равенство важи ако и само ако

$$a(a+b+c)-bc=0\,,$$

т.е. ако и само ако

$$(b-a)c = a(a+b)\ ,$$

При што мора да биде $b > a$ бидејќи $a(a+b) > 0$. ■

Доказ 2. Овој доказ е сличен на претходниот, но е нешто поедноставен. Имено, ако ја искористиме замената $x = \frac{b}{a}, y = \frac{c}{a}$, тогаш неравенството (1) е еквивалентно со неравенството

$$(1+x)(1+y) \geq 2\sqrt{xy(1+x+y)} \tag{2}$$

а ова е еквивалентно со неравенството

$$\begin{aligned}
&(1+2x+x^2)(1+2y+y^2) \geq 4xy(1+x+y) && \Leftrightarrow\\
&1+2x+x^2+2y+4xy+2x^2y+y^2+2xy^2+x^2y^2 \geq 4xy+4x^2y+4xy^2 && \Leftrightarrow\\
&1+x^2+y^2+2x+2y+2xy+x^2y^2 \geq 2xy+2x^2y+2xy^2 && \Leftrightarrow\\
&(1+x+y)^2+x^2y^2-2xy(1+x+y) \geq 0 && \Leftrightarrow\\
&(1+x+y-xy)^2 \geq 0,
\end{aligned}$$

и како последното неравенство е очигледно точно, заклучуваме дека и неравенството (2), т.е. неравенството (1) е точно. ■

Доказ 3. Од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина

$$x+y \geq 2\sqrt{xy},\ \ x, y \geq 0$$

имаме:

$$(a+b)(a+c) = bc + a(a+b+c) \geq 2\sqrt{bc \cdot a(a+b+c)}\ ,$$

т.е.

$$(a+b)(a+c) \geq 2\sqrt{abc(a+b+c)},$$

и ова е даденото неравенство (1). ■

Навистина, овој доказ со својата краткост и елеганција е вистински бисер, но до вакви бисери се доаѓа со добри идеи кои можете да ги имате после долга и упорна работа, т.е. со решавање на многу вакви и слични задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Arslanagić, Š.: Matematika za nadarene, Bosanska riječ, Sarajevo, 2004
2. Engel, A.: Problem-Solving Strategies, Springer – Verlag, New York – Berlin – Heidelberg, 1977