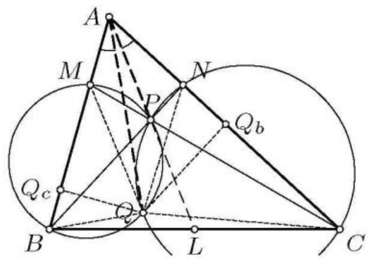
БМО 2009

1. Во множеството природни броеви реши ја равенката
$$3^x - 5^y = z^2.$$
Решение. Прво да забележиме дека $2 \mid z$, па затоа
$$4 \mid z^2 = 3^x - 5^y \equiv (-1)^x - 1 \pmod 4,$$
од каде следува дека x е парен број, т.е. $x = 2k$. Сега равенката го добива видот
$$(3^k - z)(3^k + z) = 5^y,$$
па затоа $3^k - z = 5^n$ и $3^k + z = 5^{y-n}$, за некој цел број $n \geq 0$. Ако ги собереме последните две равенства добиваме $5^n + 5^{y-n} = 2 \cdot 3^k$ и бидејќи $2 \cdot 3^k$ не е делив со 5, следува дека $n = 0$, односно
$$1 + 5^y = 2 \cdot 3^k.$$
Нека претпоставиме дека $k \geq 2$. Тогаш $9 \mid 5^y + 1$, од каде следува $y \equiv 3 \pmod 6$. Но, тогаш $2 \cdot 3^k = 5^y + 1 \equiv 5^3 + 1 \equiv 0 \pmod 7$, што не е можно. Според тоа, $k \leq 1$, од каде следува дека единствено решение на дадената равенка е $(x, y, z) = (2,1,2)$.

2. Во триаголникот ABC точките M и N се соодветно на страните AB и AC и се такви што правата MN е паралелна со страната BC. Нека P е пресекот на правите BN и CM. Кружниците опишани околу $\triangle BMP$ и $\triangle CNP$ се сечат во две различни точки P и Q. Докажи дека $\measuredangle BAQ = \measuredangle CAP$.



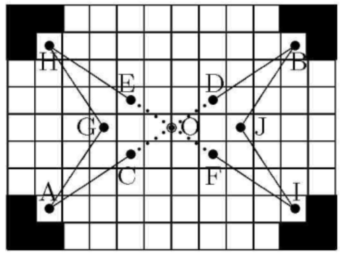
Решение. Нека правата AP ја сече BC во точка L. Од теоремата на Чева следува
$$\frac{\overline{BL}}{\overline{LC}} = \frac{\overline{BM}}{\overline{MA}} \cdot \frac{\overline{AN}}{\overline{AC}} = 1,$$
т.е. L е средина на страната BC. Нека L_b и Q_b (односно L_c и Q_c) се соодветно подножните точки на нормалите повлечени од L и Q на AC (односно на AB). Бидејќи $\measuredangle QBN = \measuredangle QPC = \measuredangle QNC$ и аналогно $\measuredangle QMB = \measuredangle QCN$, триаголниците BQM и NQC се слични. Од оваа сличност следува $\frac{\overline{QQ_b}}{\overline{QQ_c}} = \frac{\overline{NC}}{\overline{MB}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{LL_c}}{\overline{LL_b}}$, па затоа $\triangle Q_bQQ_c \sim \triangle L_cLL_b$ и притоа важи
$$\measuredangle BAQ = \measuredangle Q_cAQ = \measuredangle Q_cQ_bQ = \measuredangle L_bL_cL = \measuredangle CAL = \measuredangle CAP.$$

3. Правоаголник со димензии 9×12 е поделен на единични квадрати. Со црвена боја се обоени центрите на сите единични квадрати, освен на четирите аголни и осумте квадрати кои имаат заедничка страна со некој од аголните квадрати.

Дали е можно црвените центри да се означат со $C_1, C_2, ..., C_{96}$, но така да се исполнети следниве услови:

1) $\overline{C_1C_2} = \overline{C_2C_3} = ... = \overline{C_{95}C_{96}} = \overline{C_{96}C_1} = \sqrt{13}$, и

2) затворената искршена линија $C_1C_2...C_{96}C_1$ е централно симетрична.



Решение. Правоаголникот да го поставиме во координатна рамнина така што центарот на полето во $i-$тата колона и $j-$тата редица има координати (i, j). Точките (i, j) и (i', j') се соседни на патеката

$$\mathbf{C} = C_1C_2...C_{96}C_1$$

ако и само ако $\{|i-i'|, |j-j'|\} = \{2,3\}$.
Центарот на симетрија на патеката $\mathbf{C}$ е точката $O(6\frac{1}{2}, 5)$. Точките $A(2,2)$ и $B(11,8)$ се симетрични во однос на O и ја делат $\mathbf{C}$ на два дела $\mathbf{C}_1$ и $\mathbf{C}_2$. Единичните квадрати ќе ги обоиме стандардно како шаховска табла. Тогаш точките A и B се различно обоени, па како секои две соседни точки се различно обоени, секој од деловите $\mathbf{C}_1$ и $\mathbf{C}_2$ се состои од непарен број отсечки. Затоа овие делови се со различни должини, па затоа не се симетрични еден на друг. Според тоа, секој од деловите $\mathbf{C}_1$ и $\mathbf{C}_2$ мора да биде централно симетричен.

Деловите $\mathbf{C}_1$ и $\mathbf{C}_2$ се со непарна должина, па затоа секој од нив треба да содржи отсечка која е централно симетрична во однос на O. Единствени такви отсечки се отсечките кои ги поврзуваат точките $C(5,4)$ и $D(8,6)$, односно $E(5,6)$ и $F(8,4)$, што значи дека отсечките CD и EF се содржани во $\mathbf{C}$. Понатаму, точката A може да се поврзи само со точките C и $G(4,5)$, па затоа отсечките CA и AG се содржани во $\mathbf{C}$. Аналогно, разгледувајќи ги точките B, $H(2,8)$, $I(11,2)$ и $J(9,5)$, добиваме дека патеката $AGHEFIJBDCA$ целосно се содржи во $\mathbf{C}$, што е противречност.

4. Определи ги сите функции $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ такви што

$$f(f(m)^2 + 2f(n)^2) = m^2 + 2n^2, \text{ за секои } m, n \in \mathbb{N}.$$

Решение. Јасно, функцијата f е инјекција. Воведуваме смена $g(n) = f(n)^2$ и ја добиваме равенката

$$g(g(m) + 2g(n)) = (m^2 + 2n^2)^2. \qquad (1)$$

Од равенството

$$(n+2)^2 + 2(n-1)^2 = (n-2)^2 + 2(n+1)^2$$

следува дека

$$g(n+2) - 2g(n-1) + 2g(n-1) - g(n-2) = 0,$$

т.е. низата $\{g(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ задоволува линеарна диференцна равенка чие општо решение е

$$g(n) = an^2 + bn + c + d(-1)^n . \qquad (2)$$

Ако (2) го замениме во (1), тогаш за $m = 1$ по средувањето добиваме

$$An^4 + Bn^3 + Cn^2 + Dn + E \pm F = 4n^4 + 4n^2 + 1, \text{ за секој } n \in \mathbb{N},$$

каде $A = 4a^3$ и $B = 8a^2b$, па затоа $a = 1$ и $b = 0$. Сега, од (2) имаме

$$f(n)^2 = n^2 + c + d(-1)^n .$$

Понатаму, за $n > |c| + |d|$ имаме $n^2 - n < f(n)^2 < n^2 + n$, па затоа мора да важи $f(n) = n$, т.е. $c + d(-1)^n = 0$, од каде следува $c = d = 0$. Според тоа, $f(n) = n$, за секој $n \in \mathbb{N}$.

Лесно се проверува дека функцијата $f(n) = n$ е решение на задачата.