БМО 2006

1. Нека a, b и c се позитивни реални броеви. Докажи, дека

$$\frac{1}{a(1+b)}+\frac{1}{b(1+c)}+\frac{1}{c(1+a)} \geq \frac{3}{1+abc}.$$

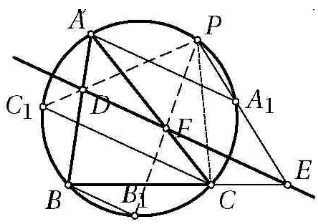
Решение. Со смените $abc = k^3,\ a = \frac{ky}{x},\ b = \frac{kz}{y},\ c = \frac{kx}{z}$, за $k, x, y, z > 0$ неравенството го добива видот $\frac{x}{ky+k^2z}+\frac{y}{kz+k^2x}+\frac{z}{kx+k^2y} \geq \frac{3}{k^3+1}$. Од неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц следува

$$\frac{x}{ky+k^2z}+\frac{y}{kz+k^2x}+\frac{z}{kx+k^2y} \geq \frac{(x+y+z)^2}{x(ky+k^2z)+y(kz+k^2x)+z(kx+k^2y)}$$
$$= \frac{(x+y+z)^2}{(k^2+k)(xy+yz+zx)} \geq \frac{3}{k^2+k} \geq \frac{3}{k^3+1},$$

бидејќи $(x+y+z)^3 \geq 3(xy+yz+zx)$ и $k^2+k \leq k^3+1$. Знак за равенство важи ако и само ако $x = y = z$ и $k = 1$, т.е. $a = b = c = 1$.

2. Даден е триаголник ABC и права m која ги сече страните AB и AC соодветно во точките D и F, и продолжението на страната BC во точката E така што C е меѓу B и E. Трите прави кои минуваат низ точките A, B, C и се паралелни со m по вторпат ја сечат кружницата опишана околу триаголникот ABC соодветно во точките A_1, B_1, C_1. Докажи дека правите A_1E, B_1F, C_1D се сечат во една точка.

Решение. Нека правата A_1E по вторпат ја сече опишаната кружница околу $\triangle ABC$ во точката P. Тогаш



$$\measuredangle EPC = \measuredangle A_1PC = \measuredangle A_1AC = \measuredangle EFC,$$

па затоа четириаголникот $EPFC$ е тетивен. Сега

$$\measuredangle FPC = \measuredangle FEC = \measuredangle B_1BC = \measuredangle B_1PC,$$

па затоа точката P лежи на правата B_1F. Аналогно P лежи на правата C_1D.

3. Определи ги сите подредени тројки (m, n, p) позитивни рационални броеви такви што броевите $m+\frac{1}{np},\ n+\frac{1}{pm},\ p+\frac{1}{mn}$ се цели.

Решение. Да означиме $a = mnp$. Броевите $\frac{a+1}{mn}, \frac{a+1}{np}, \frac{a+1}{pm}$ се цели, па затоа и нивниот производ $\frac{(a+1)^3}{a^2} = k$ е цел број. Значи, a е решение на равенката

$$x^3+(3-k)x^2+3x+1=0.$$

Оттука следува дека ако $a=\frac{q}{r}, (q,r\in\mathbb{N}, \text{NZD}(q,r)=1)$, тогаш $q,r\,|\,1$, па затоа $a=1$. Според тоа, $a+1=2a=2mnp$, па затоа $2p=\frac{a+1}{mn}$ е цел број. Аналогно $2m$ и $2n$ се цели броеви, па бидејќи $2m\cdot 2n\cdot 2p=8$, единствени решенија (m,n,p) се тројките $(1,1,1), (1,2,\frac{1}{2})$ и $(4,\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ со нивните пермутации.

4. Нека m е природен број. Определи ги сите природни броеви a за кои низата дефинирана со $a_0=a$ и

$$a_{n+1}=\begin{cases}\frac{a_n}{2}, & \text{ако } a_n \text{ е парен,}\\ a_n+m, & \text{ако } a_n \text{ е непарен,}\end{cases}$$

за $n=1,2,3,..$ е периодична, со период (сегмент кој периодично се повторува) од видот $a_0,a_1,...,a_k$, за некој k.

Решение. Ако m е парен број, тогаш низата не е периодична. Навистина, за $a=2^r k, 2\nmid k$ имаме $a_r=k$ и $a_{r+i}=k+im,$ за $i>0$.

Нека m е непарен и нека a_k е најмалиот член на низата. Јасно, $2\nmid a_k$, па затоа $a_{k+1}=a_k+m$ и $a_{k+2}=\frac{a_k+m}{2}\geq a_k$, па затоа $a_k\leq m$. Со едноставна индукција се покажува дека по a_k нема непарни членови на низата поголеми од m и парни членови на низата поголеми од $2m$. Според тоа, ако низата $\{a_n\}$ е чисто периодична, тогаш $a\in S=\{1,2,...,m,m+1,m+3,...,2m\}$.

Од друга страна, за $a\in S$ сите членови на низата припаѓаат на множеството S, па затоа низата е периодична почнувајќи од некоја точка. Уште повеќе, ако $a_k=a_l$ за $l<k$, тогаш лесно се докажува дека мора да важи $a_{k-1}=a_{l-1}$ итн., па затоа низата е периодична почнувајќи од a_0.