Шефкет Арсланагиќ
Сараево, Босна и Херцеговина

ЗА ПОДОБРУВАЊЕТО НА НЕРАВЕНСТВАТА

Докажувањето на неравенствата во математиката е многу важна и креативна работа. Тука можностите за докажување се големи и би се рекло неисцрпни.

Секако дека на ова прашање треба да му се посвети големо внимание кога станува збор за наставата по математика за талентирани ученици на сите нивоа. Кога учениците ќе стекнат посолидно знаење во оваа област, тогаш како наредно се поставува прашањето за подобрување, обопштување или рафинирање на дадено неравенство.

Преку неколку примери ќе докажеме како тоа би можело да изгледа во пракса, притоа имајќи предвид дека учениците-таленти поседуваат солиден фонд знаења од областа на неравенства. Притоа секако се мисли на тоа дека тие ги знаат најважните неравенства како оние помеѓу четирите најважни средини, неравенството на триаголник, неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц, Бернули, а оние најдобрите и неравенствата на Јенсен, Чебишев, Хоелдер, Шур, Минковски, Хајгенс, Жордан итн. Еве ги тие примери.

Пример 1. Докажи дека за реалните броеви $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ за кои $(0 \le a \le 1, 0 \le b \le 1)$ важи неравенството

$$1 + a + b \ge 3\sqrt{ab} \qquad (1)$$

Доказ: Ова неравенство не е тешко да се докаже, бидејќи

$$1 + a + b \ge 3\sqrt{ab} \; \Big|^2 \Leftrightarrow a^2 + b^2 + 1 + 2a + 2b + 2ab \ge 9ab \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (a-b)^2 + (1-ab) + 2\left[a(1-b) + b(1-a)\right] \ge 0$$

кое е точно заради ограничувањата на $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$.

Равенство важи само за $a=b=1$. Но, ќе докажеме дека даденото неравенство може да се подобри, т.е. десната страна на неравенството да се зголеми. Користејќи го неравенството $(A \ge G)$ помеѓу аритметичката и геометриската средина за три ненегативни реални броеви, може да се докаже дека

$$\frac{1+a+b}{3} \ge \sqrt[3]{1 \cdot a \cdot b}\,, \text{ т.е. } \quad 1 + a + b \ge 3\sqrt[3]{ab} \qquad (2)$$

Сега ќе докажеме дека $\sqrt[3]{ab} \ge \sqrt{ab}$ за $0 \le a, b \le 1$.

Бидејќи за $0 \le a, b \le 1$ ќе важи

$$a^2b^2(1-ab) \ge 0 \Leftrightarrow a^2b^2 \ge a^3b^3\,,$$

се добива дека

$$a^2b^2 \ge a^3b^3 \Leftrightarrow \sqrt[6]{a^2b^2} \ge \sqrt[6]{a^3b^3} \Leftrightarrow \sqrt[3]{ab} \ge \sqrt{ab}\,.$$

Значи неравенството (2) е појако или подобро од неравенството (1), т.е. можеме да напишеме дека е

$$1+a+b \ge 3\sqrt[3]{ab} \ge 3\sqrt{ab}\ .$$

Да забележиме дека и во (2) равенство важи ако и само ако $a = b = 1$.

Пример 2. Докажи дека за ненегативните реални броеви ***a, b*** и ***c*** важи неравенството

$$(a+1)(b+1)(c+1) \ge 8\sqrt{abc} \tag{3}$$

Доказ. Користејќи го неравенството $(A \ge G)$, добиваме

$$a+1 \ge \sqrt{2a},\ b+1 \ge \sqrt{2b},\ c+1 \ge \sqrt{2c},$$

а со множење на трите неравенства се добива тврдењето на задачата. Равенство важи само во случај $a=b=c=1$. Но нема да застанеме на овој резултат!!! Ќе докажеме дека е точно неравенството

$$(a+1)(b+1)(c+1) \ge \left(\sqrt[3]{abc}+1\right)^3 \tag{4}$$

и ќе докажеме дека ова неравенство е посилно од претходното неравенство (3). Имаме

$$(a+1)(b+1)(c+1) = abc+ab+ac+bc+a+b+c+1=$$
$$= abc+(ab+ac+bc)+(a+b+c)+1 \overset{(A\ge G)}{\ge}$$
$$\ge abc+3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}+3\sqrt[3]{abc}+1^3 = \left(\sqrt[3]{abc}+1\right)^3$$

кое требаше да се докаже. Равенство важи ако и само ако $a=b=c$.
Последното неравенство е посилно од неравенството (3) бидејќи е точно

$$\left(\sqrt[3]{abc}+1\right)^3 \ge 8\sqrt{abc} \tag{5}$$

Навистина, ако $\sqrt[6]{abc}=t$, се добива дека $\left(t^2+1\right)^3 \ge 8t^3$ односно

$$\left(\frac{t^2+1}{t}\right)^3 \ge 8 \Leftrightarrow \left(t+\frac{1}{t}\right)^3 \ge 8 \Leftrightarrow t+\frac{1}{t} \ge 2\ .$$

Последното е точно бидејќи $t+\frac{1}{t} \ge 2 \Leftrightarrow (t-1)^2 \ge 0$. Равенство има ако и само ако $t=1$ т.е. $abc=1$. Заради (5) заклучуваме дека неравенството (4) е посилно од неравенството (3), односно може да се запише

$$(a+1)(b+1)(c+1) \ge \left(\sqrt[3]{abc}+1\right)^3 \ge 8\sqrt{abc};\ (a,b,c \ge 0)$$

Пример 3. Ако , $x,y,z \in \mathbb{R}$ докажи дека е точно неравенството

$$x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx \ge \max\left\{\frac{3(x-y)^2}{4}, \frac{3(y-z)^2}{4}, \frac{3(z-x)^2}{4}\right\} \tag{6}$$

Доказ. Во математичката литература е добро познато неравенството

$$x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx\geq 0;\left(x,y,z\in\mathbb{R}\right) \tag{7}$$

кое е точно, бидејќи е еквивалентно со

$$\tfrac{1}{2}\left[\left(x-y\right)^2+\left(y-z\right)^2+\left(z-x\right)^2\right]\geq 0,$$

и кое станува равенство ако и само ако $x=y=z$. Јасно дека равенството (6) е посилно (подобро или појако) од равенството (7) бидејќи

$$\max\left\{\frac{3\left(x-y\right)^2}{4},\frac{3\left(y-z\right)^2}{4},\frac{3\left(z-x\right)^2}{4}\right\}\geq 0.$$

Сега ќе го докажиме неравенството (6). Ова неравенство е симетрично, т.е. не намалувајќи ја општоста (не се губи ништо) може да претпоставиме дека $x\leq y\leq z$. Во овој облик неравенството (6) добива облик

$$\begin{aligned}&x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx\geq\frac{3\left(z-x\right)^2}{4}=\tfrac{3}{4}\left(z-x\right)^2\Leftrightarrow\\&\Leftrightarrow 4x^2+4y^2+4z^2-4xy-4yz-4zx\geq 3z^2-6zx+3x^2\Leftrightarrow\\&\Leftrightarrow x^2+4y^2+z^2+2xz-4xy-4yz\geq 0\Leftrightarrow\\&\Leftrightarrow\left(2y\right)^2-4y\left(x+z\right)+\left(x+z\right)^2\geq 0\Leftrightarrow\left(2y-x-z\right)^2\geq 0.\end{aligned}$$

а последното неравенство е очигледно точно. Равенство важи ако и само ако (акко) $x=y=z$.

Пример 4. Нека $a,b,c\geq 0$ и нека $a=\min\left\{a,b,c\right\}$. Докажи дека важи неравенството

$$a^3+b^3+c^3-3abc\geq 2\left(\frac{b+c}{2}-a\right)^3 \tag{8}$$

Доказ. Очигледно е неравенството помеѓу аритметичката и геометриската средина $\dfrac{a^3+b^3+c^3}{3}\geq\sqrt[3]{a^3b^3c^3}$ т.е.

$$a^3+b^3+c^3-3abc\geq 0 \tag{9}$$

Неравенството (8) е појако од неравенството (9) затоа што заради $a=\min\left\{a,b,c\right\}$ ќе важи дека $2\left(\dfrac{b+c}{2}-a\right)^3\geq 0.$ Сега ќе го докажиме неравенството (8).

Нека $b-a=x\geq 0$ и $c-a=y\geq 0$. Тогаш важи $b-c=x-y$. Користејќи го идентитетот

$$a^3+b^3+c^3-3abc=\tfrac{1}{2}\left(a+b+c\right)\left[\left(a-b\right)^2+\left(b-c\right)^2+\left(c-a\right)^2\right],$$

даденото неравенство (8) станува

$$2\left(3a+x+y\right)\left[x^2+y^2+\left(x-y\right)^2\right]\geq\left(x+y\right)^3\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 6a\left(2x^2+2y^2-2xy\right)+4\left(x+y\right)\left(x^2-xy+y^2\right)\geq\left(x+y\right)^3\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 12a\left(x^2-xy+y^2\right)+3\left(x^3+y^3\right)\geq 3xy\left(x+y\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4a\left(x^2-xy+y^2\right)+\left(x^3+y^3\right)\geq xy\left(x+y\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4a\left(x^2-xy+y^2\right)+\left(x+y\right)\left(x^2-2xy+y^2\right)\geq 0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4a\left[\left(x-\frac{y}{2}\right)^2+\frac{3y^2}{4}\right]+\left(x+y\right)\left(x-y\right)^2\geq 0.$$

Последното неравенство е точно бидејќи $a\geq 0$. Важи равенство ако и само ако $a=b=c.$

Пример 5. Нека се $a,b,c>0$. Докажи дека важи неравенството

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\geq 3\left(1+\sqrt[3]{\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}}\right). \qquad (10)$$

Доказ. На основа на неравенството помеѓу аритметичката и геометриската средина за трите дадени броеви ќе важи

$$\frac{a+b+c}{3}\geq\sqrt[3]{abc} \quad \text{и} \quad \frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}{3}\geq\sqrt[3]{\frac{1}{abc}},$$

од каде после множење се добива

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\geq 9. \qquad (11)$$

Равенство важи ако и само ако $a=b=c.$

Неравенството (10) е подобро од неравенството (11) бидејќи на основа на аритметичката и геометриската средина ќе се добие

$$\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab},\ \frac{b+c}{2}\geq\sqrt{bc},\ \frac{c+a}{2}\geq\sqrt{ca},$$

и со множење на последните се добива

$$(a+b)(b+c)(c+a)\geq 8abc\Leftrightarrow\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}\geq 8\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\sqrt[3]{\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}}\geq 2\Leftrightarrow 1+\sqrt[3]{\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}}\geq 3\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3\left(1+\sqrt[3]{\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}}\right)\geq 9.$$

Сега ќе го докажеме неравенството (10). Имаме

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=3+\frac{a+b}{c}+\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}\geq^{(A\geq G)}$$

$$\geq 3+3\cdot\sqrt[3]{\frac{a+b}{c}\cdot\frac{b+c}{a}\cdot\frac{c+a}{b}}=3\left(1+\sqrt[3]{\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}}\right)$$

Важи равенство ако и само ако $a=b=c.$

Пример 6. Нека се $a,b,c\geq 1,$ докажи дека важи неравенството

$$\sqrt{a-1}+\sqrt{b-1}+\sqrt{c-1}<\sqrt{c(ab+1)+1}. \tag{12}$$

Доказ. Заради условот $a,b,c\geq 1,$ може да земеме смени

$$a-1=x^2,\ b-1=y^2,\ c-1=z^2;\ (x,y,z\geq 0)$$

после кои неравенството станува

$$x+y+z<\sqrt{\left(z^2+1\right)\left(x^2y^2+x^2+y^2+2\right)+1}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x+y+z)^2<\left(z^2+1\right)\left(x^2y^2+x^2+y^2+2\right)+1\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2y^2z^2+x^2y^2+x^2z^2+y^2z^2+z^2-2xy-2xz-2yz+3>0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (xy-1)^2+(yz-1)^2+(xz-1)^2+z^2\left(x^2y^2+1\right)>0.$$

Очигледно ова неравенство е точно за сите $x,y,z\geq 0$ па затоа е точно и неравенството (12). Да приметиме дека во (12) стои строго неравенство. Ова е секако можност за подобрување на ова неравенство. Ќе докажеме дека е ова возможно.Тоа е неравенството

$$\sqrt{a-1}+\sqrt{b-1}+\sqrt{c-1}\leq\sqrt{c(ab+1)};\ a,b,c\geq 1. \tag{13}$$

бидејќи е очигледно дека $\sqrt{c(ab+1)}<\sqrt{c(ab+1)+1}.$

За доказ на неравенството (13) тргнуваме од очигледното неравенство

$$\left(\sqrt{x-1}\sqrt{y-1}-1\right)^2\geq 0;(x,y\geq 1)\text{, т.е.}$$

$$(x-1)(y-1)+2\sqrt{x-1}\sqrt{y-1}+1\geq 0\ \Leftrightarrow xy\geq x-1+2\sqrt{x-1}\sqrt{y-1}+y-1\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow xy\geq\left(\sqrt{x-1}-\sqrt{y-1}\right)^2\ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{xy}\geq\sqrt{x-1}-\sqrt{y-1}. \tag{14}$$

Во последното неравенство важи равенство ако и само ако

$$\sqrt{x-1}\sqrt{y-1}=1\Leftrightarrow (x-1)(y-1)=1\Leftrightarrow xy=x+y. \tag{15}$$

Сега, од неравенството (14) се добива:

$$\sqrt{a-1}+\sqrt{b-1}+\sqrt{c-1}\leq\sqrt{ab}+\sqrt{c-1}=\sqrt{(ab+1)-1}+\sqrt{c-1}\overset{(14)}{\leq}\sqrt{c(ab+1)},\ \text{ т.е. (13).}$$

Со користење на (15), овде важи равенство ако и само ако

$$c(ab+1)=c+ab+1,\text{ т.е. } abc=ab+1. \tag{16}$$

Од (15) и (16) се добива дека во (13) важи равенство ако и само ако

$$ab=a+b\ \text{ и }\ abc=ab+1\ \text{ т.е. }\ c=\frac{ab+1}{ab}=1+\frac{1}{ab}=1+\frac{1}{a+b}.$$

Пример 7. Нека $A=\dfrac{a+b}{2}$ и $B=\sqrt{ab};\ a>b>0.$ Докажи дека важи неравенството

$$B<\frac{(a-b)^2}{8(A-B)}<A. \qquad (17)$$

Доказ. Неравенството е подобро од неравенството помеѓу аритметичката и геометриската средина на два различни позитивни броеви.
Имаме

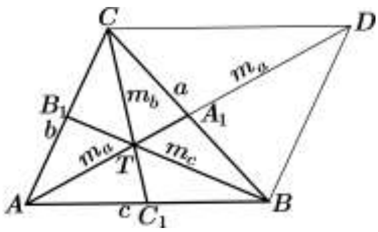
$$\frac{(a-b)^2}{8(A-B)}<\frac{\left(\sqrt{a^2}-\sqrt{b^2}\right)^2}{4\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2}=\frac{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2}{4}=\frac{\frac{a+b}{2}+\sqrt{ab}}{2}=\frac{A+B}{2}. \qquad (18)$$

Заради $B<\dfrac{A+B}{2}<A$ од равенството (18) се добива даденото неравенство.

Пример 8. Докажи дека за триаголник чии должини на страните се a,b,c, должините на тежишните линии се m_a,m_b,m_c и полупериметар $s=\dfrac{a+b+c}{2}$ важи неравенството

$$s<m_a+m_b+m_c<3s. \qquad (19)$$

Доказ. На основа на неравенството на триаголник се добива:



$$\triangle ABA_1: m_a<c+\frac{a}{2};$$

$$\triangle BCB_1: m_b<a+\frac{b}{2};$$

$$\triangle CAC_1: m_c<b+\frac{c}{2};$$

од каде со собирање се добива дека

$$m_a+m_b+m_c<\frac{3}{2}(a+b+c),$$

и заради $s=\dfrac{a+b+c}{2}$ се добива

$$m_a+m_b+m_c<3s. \qquad (20)$$

Повторно, на основа на неравенството на триаголник се добива:

$$\triangle ABA_1: m_a>c-\frac{a}{2};\qquad \triangle BCB_1: m_b>a-\frac{b}{2};\qquad \triangle CAC_1: m_c>b-\frac{c}{2};$$

од каде со собирање се добива дека

$$m_a+m_b+m_c>\frac{1}{2}(a+b+c),$$

и заради $s=\dfrac{a+b+c}{2}$ се добива

$$m_a+m_b+m_c>s. \qquad (21)$$

Сега, од (20) и (21) го добиваме неравенството (19). Но ова неравенство може да се подобри. Повторно, на основа на неравенството на триаголник се добива:

$$\triangle ABT:\tfrac{2}{3}m_a+\tfrac{2}{3}m_b>c;\ \triangle BCT:\tfrac{2}{3}m_b+\tfrac{2}{3}m_c>a;\ \triangle CAT:\tfrac{2}{3}m_c+\tfrac{2}{3}m_a>b,$$

од каде со собирање се добива дека

$$2\left(\tfrac{2}{3}m_a+\tfrac{2}{3}m_b+\tfrac{2}{3}m_c\right)>a+b+c,$$

и заради $s=\dfrac{a+b+c}{2}$ се добива

$$m_a+m_b+m_c>\tfrac{3}{2}s. \qquad (22)$$

За да ја подобриме и десната граница на (19), ја продолжуваме тежишната линија AA_1 преку A до точката D така што важи $\overline{AA_1}=\overline{A_1D}=m_a$. Сега четириаголникот $ABCD$ е паралелограм па важи $\overline{BD}=b,\ \overline{CD}=c$. Применувајќи го неравенството на триаголник на $\triangle ABD,$ добиваме $\overline{AD}<\overline{AB}+\overline{BD},$ т.е. $2m_a<c+b,$ а понатаму аналогно се добиваат неравенствата $2m_b<c+a,$ $2m_c<a+b,$ а со собирање на трите

$$2(m_a+m_b+m_c)<2(a+b+c),\ \text{т.е.}\ m_a+m_b+m_c<a+b+c,$$

или

$$m_a+m_b+m_c<2s. \qquad (23)$$

Конечно, од неравенствата (22) и (23) се добива неравенството

$$\frac{3}{2}s<m_a+m_b+m_c<2s. \qquad (24)$$

Очигледно, неравенството (24) е многу подобро (посилно) од неравенството (19).

ЛИТЕРАТУРА

[1] Andreescu, T., Gelea, R., *Mathematical Olympiad Challenges*, Birkhäuser, Boston-Basel-Berlin, 2000.

[2] Arslanagić, Š., *Aspekti nastave matematike za nadarene učenike srednoškolskog uzrasta*, Udruženje matematičara Bosne i Hercegovine, Sarajevo, 2004.

[3] Arslanagić, Š., *Matematika za nadarene*, Bosanska riječ Sarajevo, 2004.

[4] Engel, A., *Problem-Solving Strategies*, Springer-Verlag, New York-Berlin-Heidelberg, 1997.

[5] Pavković, B., Dakić, B., Hajnš, Ž., Mladinić, P., *Male teme iz matematike*, Hrvatsko matematičko društvo, Knjiga 2., Element, Zagreb, 1994.