Девятнадцатый Турнир, 1997-1998

ДЕВЯТНАДЦАТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ
Осенний тур 1997 г.
8-9 кл., тренировочный вариант.
(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты, очки за пункты одной задачи суммируются)

Задача 1.(3)
По неподвижному эскалатору человек спускается быстрее, чем поднимается.
Что быстрее: спуститься и подняться по поднимающемуся эскалатору или спуститься и подняться по спускающемуся эскалатору? (Предполагается, что все скорости, о которых идет речь, постоянны, причём скорости эскалатора при движении вверх и вниз одинаковы, а скорость человека относительно эскалатора всегда больше скорости эскалатора.)
Фольклор

Задача 2.(3)
Докажите, что уравнение $x^2+y^2-z^2=1997$ имеет бесконечно много решений в целых числах.
Н. Васильев

Задача 3.(4)
В квадрате ABCD точки K и M принадлежат сторонам BC и CD соответственно, причём AM - биссектриса угла KAD.
Докажите, что длина отрезка AK равна сумме длин отрезков DM и BK.
Фольклор

Задача 4.
а)(2) Каким наименьшим числом прямых можно разрезать все клетки шахматной доски 3*3? Нарисуйте такие прямые и докажите, что меньшим числом прямых обойтись нельзя. (Чтобы клетка была разрезана, прямая должна проходить через внутреннюю точку этой клетки.)
б)(4) Та же задача для доски 4*4.
М. Вялый

ДЕВЯТНАДЦАТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ
Осенний тур 26 октября 1997 г.
8-9 кл., основной вариант.
(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты, очки за пункты одной задачи суммируются)

Задача 1.(3)
Последовательность $\{x_n\}$ определяется условиями:
$x_1=19$; $x_2=97$; $x_{n+2}=x_n-(1/x_{n+1})$.
Докажите, что среди членов последовательности найдётся ноль. Найдите номер этогочлена.
А. Берзиньш

Задача 2.(3)
M - середина основания BC треугольника ABC.
Постройте прямую l, пересекающую треугольник и параллельную его основанию, такую, что её отрезок, заключенный внутри треугольника, виден из точки M под прямым углом.
Фольклор

Задача 3.(5)
Первоначально на каждом поле доски 1*n стоит шашка. Первым ходом разрешается переставить любую шашку на соседнюю клетку (одну из двух, если шашка не с краю), так что образуется столбик из двух шашек. Далее очередным ходом каждый столбик можно передвинуть в любую сторону на столько клеток, сколько в нём шашек (в пределах доски); если столбик попал на непустую клетку, он ставится на стоящий там столбик и объединяется с ним.
Докажите, что за n-1 ход можно собрать все шашки на одной клетке.
А. Шаповалов

Задача 4.(5)
Две окружности пересекаются в точках A и B. К ним проведена общая касательная, которая касается первой окружности в точке C, а второй - в точке D. Пусть B - ближайшая точка к прямой CD. Прямая CB пересекла вторую окружность второй раз в точке E.
Докажите, что AD - биссектриса угла CAE.
П. Кожевников

Задача 5.(8)
Раскрашенный в чёрный и белый цвета кубик с гранью в одну клетку поставили на одну из клеток шахматной доски и прокатили по ней так, что кубик побывал на каждой клетке ровно по одному разу.
Можно ли так раскрасить кубик и так прокатить его по доске, чтобы каждый раз цвета клетки и соприкоснувшейся с ней грани совпадали?
А. Шаповалов

Задача 6.(9)
Каждая сторона правильного треугольника разбита на 10 равных отрезков, и через все точки деления проведены прямые, параллельные сторонам. Данный треугольник разбился на 100 маленьких треугольников-клеток. Треугольники, расположенные между двумя соседними параллельными прямыми, образуют полоску.
Какое максимальное число клеток можно отметить, чтобы никакие две отмеченные клетки не принадлежали одной полоске ни по одному из трёх направлений?
Р. Женодаров

ДЕВЯТНАДЦАТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ
Осенний тур 1997 г.
10-11 кл., тренировочный вариант.
(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты, очки за пункты одной задачи суммируются)

Задача 1.(2+3)
а)(2) Каким наименьшим числом прямых можно разрезать все клетки шахматной доски 3*3? Нарисуйте такие прямые и докажите, что меньшим числом прямых обойтись нельзя. (Чтобы клетка была разрезана, прямая должна проходить через внутреннюю точку этой клетки.)
б)(3) Та же задача для доски 4*4.
М. Вялый

Задача 2.(3)
a и b - две данные стороны треугольника.
Как подобрать третью сторону c так, чтобы точки касания вписанной и вневписанной окружностей со стороной c делили эту сторону на три равных отрезка? При каких a и b такая сторона c существует? (Рассматривается вневписанная окружность, касающаяся стороны c и продолжений сторон a и b.)
Фольклор

Задача 3.(4)
Докажите, что уравнение
$xy(x-y)+yz(y-z)+zx(z-x)=6$
имеет бесконечно много решений в целых числах.
Н. Васильев

Задача 4.(4)
На шахматной доске 5*5 расставили максимальное число коней так, чтобы они не били друг друга. Докажите, что такая расстановка - единственная.
А. Канель-Белов

ДЕВЯТНАДЦАТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ
Осенний тур 26 октября 1997 г.
10-11 кл., основной вариант.
(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты, очки за пункты одной задачи суммируются)

Задача 1.(4)
CM и BN - медианы треугольника ABC, P и Q - точки соответственно на AB и AC такие, что биссектриса угла C треугольника одновременно является биссектрисой угла MCP, а биссектриса угла B - биссектрисой угла NBQ. Оказалось, что AP=AQ. Следует ли из этого, что треугольник ABC равнобедренный?
В. Сендеров

Задача 2.(1+2+4)
Верны ли утверждения:
а)(1) Если многоугольник можно разбить ломаной на два равных многоугольника, то его можно разбить отрезком на два равных многоугольника.
б)(2) Если выпуклый многоугольник можно разбить ломаной на два равных многоугольника, то его можно разбить отрезком на два равных многоугольника.
в)(4) Если выпуклый многоугольник можно разбить ломаной на два многоугольника, которые можно перевести друг в друга с помощью движения, сохраняющего ориентацию (то есть с помощью поворота и параллельного переноса), то его можно разбить отрезком на два многоугольника, которые можно перевести друг в друга с помощью движения, сохраняющего ориентацию.
С. Маркелов

Задача 3.(3+3)
Перемножаются все выражения вида
$\pm 1^{1/2} \pm 2^{1/2} \pm \ldots \pm 99^{1/2} \pm 100^{1/2}$
(при всевозможных комбинациях знаков). Докажите, что результат
а)(3) целое число,
б)(3) квадрат целого числа.
А. Канель-Белов

Задача 4.(4+4)
а)(4) На стол положили (с перекрытиями) несколько одинаковых салфеток, имеющих форму правильного 6-угольника, причём у всех салфеток одна сторона параллельна одной и той же прямой.
Всегда ли можно вбить в стол несколько гвоздей так, что все салфетки будут прибиты, причём каждая - только одним гвоздём?
б)(4) Тот же вопрос про правильные 5-угольники.
А. Канель-Белов

Задача 5.(8)
Дима придумал секретный шифр: каждая буква заменяется на слово длиной не больше 10 букв. Шифр называется хорошим, если всякое зашифрованное слово расшифровывается однозначно. Серёжа убедился (с помощью компьютера), что если зашифровать слово длиной не больше 10000 букв, то результат расшифровывается однозначно.
Следует ли из этого, что шифр хороший? (В алфавите 33 буквы, под "словом" мы понимаем любую последовательность букв, независимо от того, имеет ли она смысл.)
Д. Пионтковский, С. Шалунов

Задача 6.(7+7)
Каждая сторона правильного треугольника разбита на n равных отрезков, и через все точки деления проведены прямые, параллельные сторонам. Данный треугольник разбился на n^2 маленьких треугольников-клеток. Треугольники, расположенные между двумя соседними параллельными прямыми, образуют полоску.
а)(7) Какое наибольшее число клеток можно отметить, чтобы никакие две отмеченные клетки не принадлежали одной полоске ни по одному из трёх направлений, если n=10?
б)(7) Тот же вопрос для n=9.
Р. Женодаров

ДЕВЯТНАДЦАТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ
Весенний тур 1998 г.
8-9 кл., тренировочный вариант.
(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты)

Задача 1.(3)
Аня, Боря и Вася составляли слова из заданных букв. Все составили разное число слов: больше всех - Аня, меньше всех - Вася. Затем ребята просуммировали очки за свои слова. Если слово есть у двух игроков, за него даётся 1 очко, у одного игрока - 2 очка, слова, общие у всех трёх игроков, вычёркиваются
Могло ли так случиться, что больше всех очков набрал Вася, а меньше всех - Аня?
А. Шаповалов

Задача 2.(3)
Шахматный король обошёл всю доску 8*8, побывав на каждой клетке по одному разу, вернувшись последним ходом в исходную клетку.
Докажите, что он сделал чётное число диагональных ходов.
В. Произволов

Задача 3.(3)
AB и CD - отрезки, лежащие на двух сторонах угла (O - вершина угла, A лежит между O и B, C - между O и D). Через середины отрезков AD и BC проведена прямая, пересекающая стороны угла в точках M и N (M, A и B лежат на одной стороне угла; N, C и D - на другой).
Докажите, что OM/ON=AB/CD.
В. Сендеров

Задача 4.(4)
Для каждого трёхзначного числа берём произведение его цифр, а затем эти произведения, вычисленные для всех трёхзначных чисел, складываем.
Сколько получится? (Пояснение: берётся произведение всех цифр трёхзначного числа, так что если хотя бы одна из цифр - ноль, то и произведение - ноль).
Г. Гальперин

Задача 4 (давалась в г. Кирове Кировской обл. вместо предыдущей задачи 4).
Незнайка решал уравнение, в левой части которого стоял многочлен третьей степени с целыми коэффициентами, а в правой - 0. Он нашёл корень 1/7. Знайка, заглянув к нему в тетрадь, увидел только первые два слагаемых многочлена: $19x^3+98x^2$ и сразу сказал, что ответ не верен.
Обоснуйте ответ Знайки.
И. С. Рубанов

Задача 5.(5)
Барон Мюнхгаузен утверждает, что смог разрезать некоторый равнобедренный треугольник на три треугольника так, что из любых двух можно сложить равнобедренный треугольник.
Не хвастает ли барон?
А. Шаповалов

ДЕВЯТНАДЦАТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ
Весенний тур 1 марта 1998 г.
8-9 кл., основной вариант.
(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты)

Задача 1.(3)
Существует ли такой набор из 10 натуральных чисел, что каждое не делится ни на одно из остальных, а квадрат каждого делится на каждое из остальных?
Фольклор

Задача 2.(3)
На стороне AB параллелограмма ABCD (или на её продолжении) взята точка M такая, что ∠MAD=∠AMO, где O - точка пересечения диагоналей параллелограмма.
Докажите, что MD=MC.
М. Смуров

Задача 3.(4)
Шесть игральных костей нанизали на спицу так, что каждая может вращаться независимо от остальных (протыкаем через центры противоположных граней). Спицу положили на стол и прочитали число, образованное цифрами на верхних гранях костей.
Докажите, что можно так повернуть кости, чтобы это число делилось на 7. (На гранях стоят цифры от 1 до 6, сумма цифр на противоположных гранях равна 7.)
Г. Гальперин

Задача 4.(4)
Путешественник посетил деревню, каждый житель которой либо всегда говорит правду, либо всегда лжёт. Жители деревни стали в круг лицом к центру, и каждый сказал путешественнику про соседа справа, правдив ли он. На основании этих сообщений путешественник смог однозначно определить, какую долю от всех жителей составляют лжецы.
Определите и вы, чему она равна.
Б. Френкин

Задача 5.(7)
Квадрат разбит прямыми на 25 квадратиков-клеток. В некоторых клетках нарисована одна из диагоналей так, что никакие две диагонали не имеют общей точки (даже общего конца).
Каково наибольшее возможное число нарисованных диагоналей?
И. С. Рубанов

Задача 6.(8)
За круглым столом сидят десять человек, перед каждым - несколько орехов. Всего орехов - сто. По общему сигналу каждый передает часть своих орехов соседу справа: половину - если у него(*у того, **кто** передаёт* - Ред.) было чётное число или один орех плюс половину остатка - если нечётное число. Такая операция проделывается второй раз, затем третий и так далее, до бесконечности.
Докажите, что через некоторое время у всех станет по десять орехов.
А. Шаповалов

ДЕВЯТНАДЦАТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ
Весенний тур 1998 г.
10-11 кл., тренировочный вариант.
(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты)

Задача 1.(3)
Барон Мюнхгаузен утверждает, что ему удалось составить некоторый прямоугольник из нескольких подобных между собой непрямоугольных треугольников.
Можно ли ему верить? (Среди подобных треугольников могут быть иравные).
А. Федотов

Задача 2.(3)
Для каждого четырёхзначного числа берём произведение его цифр, а затем эти произведения, вычисленные для всех четырёхзначных чисел, складываем.
Сколько получится? (Пояснение: берётся произведение всех цифр четырёхзначного числа, так что если хотя бы одна из цифр - ноль, то и произведение - ноль).
Г. Гальперин

Задача 3.(3)
В какое наибольшее число цветов можно раскрасить шахматную доску 8*8 так, чтобы каждая клетка граничила по стороне хотя бы с двумя клетками своего цвета? (Каждая клетка закрашивается целиком в один цвет.)
А. Шаповалов

Задача 4.(4)
Положительные числа A, B, C и D таковы, что система уравнений

$x^2 + y^2 = A$
$|x| + |y| = B$

имеет m решений, а система уравнений

$x^2 + y^2 + z^2 = C$
$|x| + |y| + |z| = D$

имеет n решений. Известно, что $m > n > 1$.
Найдите m и n.
Г. Гальперин

Задача 5.(5)
В угол вписана окружность, O - её центр. Через точку A, симметричную точке O относительно одной из сторон угла, провели к окружности касательные, точки пересечения которых с дальней от точки A стороной угла - B и C.
Докажите, что центр описанной окружности треугольника ABC лежит на биссектрисе данного угла.
И. Шарыгин

ДЕВЯТНАДЦАТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ
Весенний тур 1 марта 1998 г.
10-11 кл., основной вариант.
(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты, очки за пункты одной задачи суммируются)

Задача 1.(4)
Докажите неравенство:
$a^3/(a^2+ab+b^2) + b^3/(b^2+bc+c^2) + c^3/(c^2+ca+a^2) \geq (a+b+c)/3$.
(a, b, c - положительные числа).
Г. Алиханов

Задача 2.(4)
Квадрат со стороной 1 разрезан на прямоугольники. В каждом прямоугольнике выбрали одну из двух меньших сторон (если прямоугольник - квадрат, то выбрали любую из четырёх сторон).
Докажите, что сумма всех выбранных сторон не меньше 1.
Фольклор

Задача 3.(2+3)
а)(2) На доске выписаны числа 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128. Разрешается стереть любые два числа и вместо них выписать их разность - неотрицательное число. После семи таких операций на доске будет только одно число. Может ли оно равняться 97 ?
б)(3) На доске выписаны числа 1, 2^1, 2^2, 2^3, ..., 2^{10}. Разрешается стереть любые два числа и вместо них выписать их разность - неотрицательное число. После нескольких таких операций на доске будет только одно число.
Чему оно может быть равно?
А. Шаповалов

Задача 4.(5)
Внутренняя точка M выпуклого четырёхугольника ABCD такова, что треугольники AMB и CMD - равнобедренные (AM=MB, CM=MD) и у каждого угол при вершине M равен 120^o.
Докажите, что найдётся точка N такая, что треугольники BNC и DNA - правильные.
И. Шарыгин

Задача 5.(6)
Назовём лабиринтом шахматную доску 8*8, где между некоторыми полями вставлены перегородки. Если ладья может обойти все поля, не перепрыгивая через перегородки, то лабиринт называется хорошим, иначе - плохим.
Каких лабиринтов больше - хороших или плохих?
А. Шаповалов

Задача 6.(6+6)
а)(6) Двое показывают карточный фокус. Первый снимает пять карт из колоды, содержащей 52 карты (предварительно перетасованной кем-то из зрителей), смотрит в них и после этого выкладывает их в ряд слева направо, причём одну из карт кладет рубашкой вверх, а остальные - картинкой вверх. Второй участник фокуса отгадывает закрытую карту.
Докажите, что они могут так договориться, что второй всегда будет угадывать карту.
б)(6) Второй фокус отличается от первого тем, что первый участник выкладывает слева направо четыре карты картинкой вверх, а одну не выкладывает. Могут ли в этом случае участники фокуса так договориться, чтобы второй всегда угадывал невыложенную карту?
Г. Гальперин по мотивам книги М. Гарднера