

НЕКОИ ТЕОРЕМИ ЗА ТОЧКИ ВО РАМНИНАТА НА ТРИАГОЛНИКОТ

Веќе во шесто одделение научивме дека површината на триаголникот е еднаква на половина од производот на должината на страната и на неа соодветната висина. Со примена на оваа формула за површина на триаголник ќе ги докажеме првите две теореми кои се однесуваат на точка која е во внатрешноста или во надворешноста на рамностран триаголник.

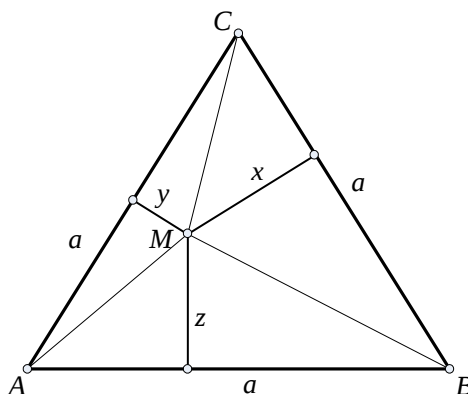
Теорема 1. Ако x , y и z се растојанија од произволна точка M која е во внатрешноста на рамностран триаголник ABC до страните AB , BC и CA соодветно (види цртеж), тогаш збирот $x + y + z$ е константен.

Доказ. Збирот на плоштините на триаголниците BCM , CAM и ABM е еднаков на плоштината на триаголникот ABC , па според тоа

$$\frac{ax}{2} + \frac{ay}{2} + \frac{az}{2} = \frac{ah}{2}.$$

Ако последното равенство го поделиме со $\frac{a}{2}$ добиваме

$$x + y + z = h. \blacksquare$$



Теорема 2. Ако точката M е во надвор од триаголникот ABC а во внатрешноста на аголот $\alpha = \angle BAC$ (види цртеж), тогаш

$$y + z - x = h$$

(ознаките x , y и z се како од претходната теорема).

Доказ. Ако од збирот на плоштините на триаголниците ABM и ACM (види цртеж) ја одземеме плоштината на триаголникот BCM ја добиваме плоштината на рамностраниот триаголник ABC , т.е.

$$\frac{ay}{2} + \frac{az}{2} - \frac{ax}{2} = \frac{ah}{2}.$$

Ако последното равенство го поделиме со $\frac{a}{2}$ добиваме

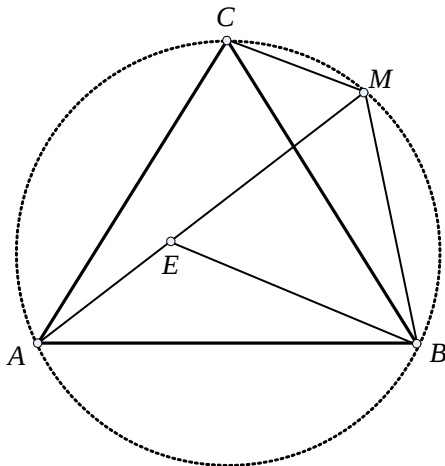
$$y + z - x = h,$$

т.е. точно е бараното равенство. ■

Теорема 3. За точката M која припаѓа на помалиот кружен лак BC од опишаната кружница околу рамностраниот триаголник ABC точно е равенството

$$\overline{MA} = \overline{MB} + \overline{MC}.$$

Доказ. На отсечката AM



Теорема 4. Збирот

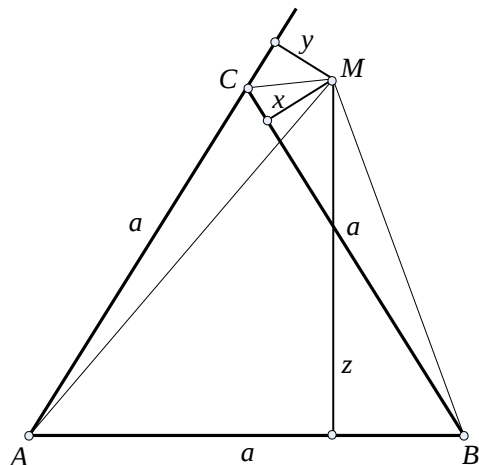
$$\overline{MA}^2 + \overline{MB}^2 + \overline{MC}^2$$

(види цртеж), не зависи од изборот на точката M на лакот BC , т.е. е константен.

Доказ. Ќе ги воведеме ознаките

$$\overline{MA} = x, \overline{MB} = y \text{ и } \overline{MC} = z \text{ и}$$

$$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CA} = a.$$



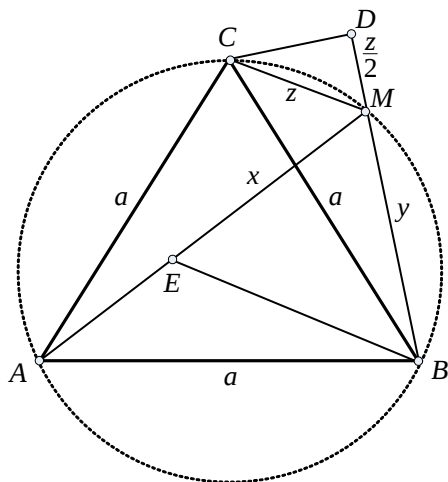
(види цртеж), избираме точка E така што $\overline{BE} = \overline{BM}$. Според тоа, триаголникот BME е рамнокрак и бидејќи $\angle AMB = 60^\circ$ и $\angle AMC = 60^\circ$ (како периферени али над третина од кружница), триаголникот BME е рамностран, односно

$$\overline{MB} = \overline{BE} = \overline{EM}.$$

Понатаму, триаголниците $\triangle ABE$ и $\triangle CMB$ се складни, па според тоа $\overline{AE} = \overline{MC}$. Сега е јасно дека

$$\overline{MA} = \overline{AE} + \overline{EM} = \overline{MC} + \overline{MB},$$

со што теоремата е докажана. ■



Од $\angle BMC = 120^\circ$, следува $\angle DMC = 60^\circ$ (види цртеж). Правоаголниот триаголник MCD е половина од рамностран триаголник со страна z па според тоа $\overline{DM} = \frac{z}{2}$. Со примена на Питагорина теорема за правоаголниот триаголник CDM добиваме

$$\overline{CD}^2 = z^2 - \left(\frac{z}{2}\right)^2, \text{ т.е. } \overline{CD}^2 = \frac{3}{4}z^2.$$

Од правоаголниот триаголник BCD имаме

$$\overline{CD}^2 = \overline{BC}^2 - \overline{BD}^2, \text{ т.е. } \frac{3}{4}z^2 = a^2 - \left(y + \frac{z}{2}\right)^2.$$

Одовде, по средувањето, добиваме

$$y^2 + z^2 + yz = a^2.$$

Ако последната равенка ја помножиме со 2 добиваме

$$y^2 + z^2 + (y^2 + z^2 + 2yz) = 2a^2.$$

Изразот во втората заграда во последното равенство е полн квадрат, па затоа

$$y^2 + z^2 + (y + z)^2 = 2a^2.$$

Но, од теорема 3 имаме $y + z = x$ и со замена во претходното равенство добиваме

$$y^2 + z^2 + x^2 = 2a^2, \text{ т.е. } \overline{MA}^2 + \overline{MB}^2 + \overline{MC}^2 = 2a^2,$$

и како $2a^2$ е константа добиваме дека и изразот

$$\overline{MA}^2 + \overline{MB}^2 + \overline{MC}^2$$

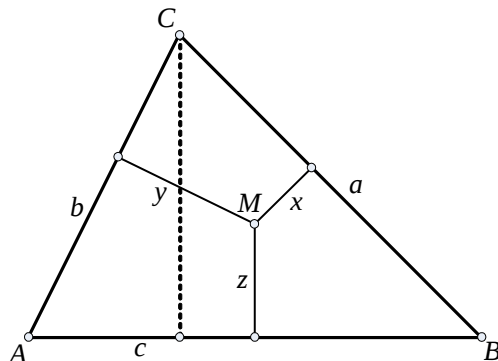
е константен, т.е. не зависи од изборот на точката M на лакот BC . ■

Задачи за самостојна работа

1. Користејќи го доказот на теорема 1, докажи дека во секој триаголник ABC (види цртеж) е исполнето равенството

$$\frac{x}{h_a} + \frac{y}{h_b} + \frac{z}{h_c} = 1.$$

2. Кои равенства важат ако точката M припаѓа на страната



- а) AB , б) BC в) CA .

3. На продолжението на основата AB на рамнокрак триаголник ABC е избрана точка D . Докажи дека разликата на растојанијата на точката D од правите на кои припаѓаат краците на триаголникот е константна, т.е. не зависи од изборот на точката D на правата $p(A, B)$.

4. Докажи дека во секој триаголник ABC за точка M надовр од него (види цртеж) е точно равенството

$$-\frac{x}{h_a} + \frac{y}{h_b} + \frac{z}{h_c} = 1.$$

