Šefket Arslanagić, Bosna i Hercegovina
Alija Muminagić, Danska

НЕСБИТОВО НЕРАВЕНСТВО И ЕДНО НЕГОВО ПОДОБРУВАЊЕ

Во 1903. А. М. Несбит го докажал следново неравенство

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{3}{2},\ a,b,c>0, \qquad (1)$$

при што знак за равенство важи ако и само ако $a=b=c$. Во литературата се среќаваат повеќе докази на ова неравенство, кои се засноваат на неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина, неравенството меѓу аритметичката и хармониската средина, неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц итн. Во оваа статија ќе дадеме неколку докази на неравенството (1), при што ќе ги користиме неравенствата на Чебишев и Јенсен, неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина и фактот дека даденото неравенство е хомогено.

Доказ 1. Неравенството (1) е хомогено, па затоа можеме да земеме дека $a+b+c=1$, каде $0<a,b,c<1$. Според тоа, треба да го докажеме неравенството

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}=f(a)+f(b)+f(c)\geq\frac{3}{2},$$

каде $f(x)=\frac{x}{1-x}$, $x\in(0,1)$. Но, ако $x\in(0,1)$, тогаш

$$f''(x)=\frac{2}{(1-x)^3}>0,$$

што значи дека функцијата f е конвексна на интервалот $(0,1)$. Сега, од неравенството на Јенсен следува дека

$$\frac{f(a)+f(b)+f(c)}{3}\geq f\left(\frac{a+b+c}{3}\right)=f\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{1}{2},$$

т.е.

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}=f(a)+f(b)+f(c)\geq\frac{3}{2}.$$

Јасно, знак за равенство важи ако и само ако $a=b=c$. ♦

Доказ 2. Неравенството (1) е хомогено, па затоа можеме да земеме дека $a+b+c=1$, каде $0<a,b,c<1$. Според тоа, треба да го докажеме неравенството

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}=f(a)+f(b)+f(c)\geq\frac{3}{2},$$

каде $f(x)=\frac{x}{1-x}$, $x\in(0,1)$. Понатаму,

$$f'(x)=\frac{1}{(1-x)^2}\,,\ \ f(\tfrac{1}{3})=\tfrac{1}{2}\ \text{ и }\ f'(\tfrac{1}{3})=\tfrac{9}{4}\,,$$

па затоа равенката на тангентата на кривата $y=f(x)$ во точката $M(\frac{1}{3},\frac{1}{2})$ е

$$y-\tfrac{1}{2}=\tfrac{9}{4}(x-\tfrac{1}{3})\text{ , т.е. } y=\tfrac{9}{4}x-\tfrac{1}{4}\,.$$

Имаме,

$$f(x)-\tfrac{9x-1}{4}=\tfrac{x}{1-x}-\tfrac{9x-1}{4}=\tfrac{(3x-1)^2}{4(1-x)}\geq 0\,, \tag{2}$$

за секој $x\in(0,1)$, при што знак за равенство важи ако и само ако $x=\frac{1}{3}$. Конечно, од неравенството (2) следува дека за секои

$$a,b,c\in(0,1)\,,\ a+b+c=1$$

важи

$$f(a)-\tfrac{9a-1}{4}+f(b)-\tfrac{9b-1}{4}+f(c)-\tfrac{9c-1}{4}\geq 0\,,$$

$$f(a)+f(b)+f(c)\geq\tfrac{9(a+b+c)-3}{4}=\tfrac{3}{2}\,,$$

при што знак за равенство важи ако и само ако $a=b=c$. ♦

Коментар 1. Неравенството (2) следува и од фактот дека функцијата $f(x)=\frac{x}{1-x}$ е конвексна на интервалот $(0,1)$, што значи дека графикот на функцијата f на интервалот $(0,1)$ се наоѓа над нејзината тангента во точката $M(\frac{1}{3},\frac{1}{2})$.

Доказ 3. За секои $x,y,z>0$ важи

$$(\tfrac{x}{y+z}-\tfrac{1}{2})^2\geq 0 \quad\Leftrightarrow$$

$$\tfrac{(2x-y-z)^2}{[2(y+z)]^2}\geq 0 \quad\Leftrightarrow$$

$$(2x-y-z)^2\geq 0 \quad\Leftrightarrow$$

$$4x^2+y^2+z^2-4xy-2xz+2yz\geq 0 \quad\Leftrightarrow$$

$$4x^2+4xy+4yz-8xy-8xz+y^2+2yz+z^2\geq 0 \quad\Leftrightarrow$$

$$4x(x+y+z)-8x(y+z)+(y+z)^2\geq 0 \quad\Leftrightarrow$$

$$4x(x+y+z)-(y+z)(8x-y-z)\geq 0 \quad\Leftrightarrow$$

$$\tfrac{4x(x+y+z)-(y+z)(8x-y-z)}{4(y+z)(x+y+z)}\geq 0 \quad\Leftrightarrow$$

$$\tfrac{x}{y+z}\geq\tfrac{8x-y-z}{4(x+y+z)}\,. \tag{3}$$

Конечно, од неравенството (3) следува дека за секои $a,b,c>0$ се точни неравенствата:

$$\frac{a}{b+c} \geq \frac{8a-b-c}{4(a+b+c)},\ \frac{b}{c+a} \geq \frac{8b-a-c}{4(a+b+c)},\ \frac{c}{a+b} \geq \frac{8c-a-b}{4(a+b+c)}$$

и ако ги собереме последните три неравенства добиваме

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b} \geq \frac{8a-b-c}{4(a+b+c)}+\frac{8b-a-c}{4(a+b+c)}+\frac{8c-a-b}{4(a+b+c)}=\frac{6(a+b+c)}{4(a+b+c)}=\frac{3}{2}.$$

Јасно, знак за равенство важи ако и само ако

$$\frac{a}{b+c}=\frac{b}{c+a}=\frac{c}{a+b}=\frac{1}{2},$$

т.е. ако и само ако $a=b=c$. ♦

Доказ 4. Од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина применето на позитивните реални броеви $a^{\frac{3}{2}}, b^{\frac{3}{2}}, b^{\frac{3}{2}}$ и $a^{\frac{3}{2}}, c^{\frac{3}{2}}, c^{\frac{3}{2}}$ следуваат неравенствата

$$\frac{a^{\frac{3}{2}}+b^{\frac{3}{2}}+b^{\frac{3}{2}}}{3} \geq \sqrt[3]{a^{\frac{3}{2}}b^{\frac{3}{2}}b^{\frac{3}{2}}}=a^{\frac{1}{2}}b \text{ и}$$

$$\frac{a^{\frac{3}{2}}+c^{\frac{3}{2}}+c^{\frac{3}{2}}}{3} \geq \sqrt[3]{a^{\frac{3}{2}}c^{\frac{3}{2}}c^{\frac{3}{2}}}=a^{\frac{1}{2}}c,$$

т.е. неравенствата

$$a^{\frac{3}{2}}+b^{\frac{3}{2}}+b^{\frac{3}{2}} \geq 3a^{\frac{1}{2}}b \text{ и } a^{\frac{3}{2}}+c^{\frac{3}{2}}+c^{\frac{3}{2}} \geq 3a^{\frac{1}{2}}c.$$

Последните две неравенства ги собираме и последователно добиваме

$$2(a^{\frac{3}{2}}+b^{\frac{3}{2}}+c^{\frac{3}{2}}) \geq 3a^{\frac{1}{2}}(b+c),$$

$$2a(a^{\frac{3}{2}}+b^{\frac{3}{2}}+c^{\frac{3}{2}}) \geq 3a^{\frac{3}{2}}(b+c),$$

$$\frac{a}{b+c} \geq \frac{3a^{\frac{3}{2}}}{2(a^{\frac{3}{2}}+b^{\frac{3}{2}}+c^{\frac{3}{2}})}.$$

На потполно аналоген начин ги добиваме неравенствата

$$\frac{b}{a+c} \geq \frac{3b^{\frac{3}{2}}}{2(a^{\frac{3}{2}}+b^{\frac{3}{2}}+c^{\frac{3}{2}})} \text{ и } \frac{c}{b+a} \geq \frac{3c^{\frac{3}{2}}}{2(a^{\frac{3}{2}}+b^{\frac{3}{2}}+c^{\frac{3}{2}})}.$$

Конечно, ако ги собереме последните три неравенства добиваме

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{b+a} \geq \frac{3(a^{\frac{3}{2}}++b^{\frac{3}{2}}+c^{\frac{3}{2}})}{2(a^{\frac{3}{2}}+b^{\frac{3}{2}}+c^{\frac{3}{2}})}=\frac{3}{2}.$$

Јасно, знак за равенство важи ако и само ако $a^{\frac{3}{2}}=b^{\frac{3}{2}}=b^{\frac{3}{2}}$, т.е. ако и само ако $a=b=c$. ♦

Доказ 5. Ги воведуваме ознаките

$$x=b+c,\ \ y=c+a,\ \ z=a+b$$

и добиваме

$$y+z-x=2a,\ \ x+z-y=2b,\ \ x+y-z=2c.$$

Понатаму, при воведените ознаки, ако го искористиме неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина добиваме

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}=\frac{y+z-x}{2x}+\frac{x+z-y}{2y}+\frac{x+y-z}{2z}=\frac{1}{2}\left(\frac{y}{x}+\frac{z}{x}+\frac{x}{y}+\frac{z}{y}+\frac{x}{z}+\frac{y}{z}\right)-\frac{3}{2}$$

$$\geq\frac{1}{2}\cdot 6\cdot\sqrt[6]{\frac{y}{x}\frac{z}{x}\frac{x}{y}\frac{z}{y}\frac{x}{z}\frac{y}{z}}-\frac{3}{2}=3-\frac{3}{2}=\frac{3}{2}.$$

Јасно, знак за равенство важи ако и само ако

$$\frac{y}{x}=\frac{z}{x}=\frac{x}{y}=\frac{z}{y}=\frac{x}{z}=\frac{y}{z},$$

што значи ако и само ако $x=y=z$, односно ако и само ако $a=b=c$. ♦

Доказ 6. Ги воведуваме ознаките

$$x=\frac{a}{b+c},\ y=\frac{b}{c+a},\ z=\frac{c}{a+b}.$$

Да ја разгледаме функцијата

$$f(t)=\frac{t}{1+t},\ t\in(0,+\infty).$$

Имаме, $f'(t)=\frac{1}{(1+t)^2}>0$ и $f''(t)=\frac{-2}{(1+t)^3}<0$, за секој $t\in(0,+\infty)$, што значи дека оваа функција монотоно расте и е конкавна на интервалот $(0,+\infty)$. Сега, од неравенството на Јенсен за конкавни функции следува

$$f(\tfrac{1}{2})=\frac{1}{3}=\frac{1}{3}\left(\frac{a}{a+b+c}+\frac{b}{a+b+c}+\frac{c}{a+b+c}\right)=\frac{1}{3}(f(x)+f(y)+f(z))\leq f\left(\frac{x+y+z}{3}\right),$$

и како функцијата f е монотоно растечка на интервалот $(0,+\infty)$ од последното неравенство добиваме $\frac{1}{2}\leq\frac{x+y+z}{3}$, односно

$$\frac{3}{2}\leq x+y+z=\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}.$$

Јасно, знак за равенство важи ако и само ако $x=y=z$, односно ако и само ако $a=b=c$. ♦

Доказ 7. Ги воведуваме ознаките

$$x=\frac{a}{b+c},\ y=\frac{b}{c+a},\ z=\frac{c}{a+b}\ \text{ и }\ T=\frac{x+y+z}{3},$$

што значи дека доволно е да докажеме дека $T\geq\frac{1}{2}$.

Прво да забележиме дека очигледното неравентсво

$$(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\geq 0$$

последователно е еквивалентно со неравенствата

$$x^2+y^2+z^2\geq xy+yz+zx,$$

$$\frac{1}{3}(x+y+z)^2\geq xy+yz+zx,$$

т.е. со неравенството

$$xy+yz+zx\leq 3T^2, \tag{4}$$

а од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува дека

$$xyz \le T^3 . \tag{5}$$

Понатаму, при воведените ознаки имаме

$$\frac{x}{1+x} + \frac{y}{1+y} + \frac{z}{1+z} = 1$$

од што следува дека

$$1 = 2xyz + xy + yz + zx$$

и ако ги искористиме неравенствата (4) и (5) последователно добиваме

$$\begin{aligned} &1 \le 2T^3 + 3T^2, \\ &2T^3 + 3T^2 - 1 \ge 0, \\ &(2T-1)(T+1)^2 \ge 0, \\ &2T - 1 \ge 0, \\ &T \ge \tfrac{1}{2}, \end{aligned}$$

што и требаше да се докаже. Јасно знак за равенство важи ако и само ако во неравенствата (4) и (5) важи знак за равенство, т.е. ако и само ако $x = y = z$, односно ако и само ако $a = b = c$. ♦

Доказ 8. Со L да ја означиме левата страна на неравенството (1). Даденото неравенство е симетрично, па затоа без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека $a \ge b \ge c > 0$, од каде што следува дека $\frac{1}{b+c} \ge \frac{1}{c+a} \ge \frac{1}{a+b} > 0$. Сега од неравенството на Чебишев добиваме

$$\begin{aligned} L &\ge \tfrac{1}{3}(a+b+c)\left(\tfrac{1}{b+c} + \tfrac{1}{c+a} + \tfrac{1}{a+b}\right) = \tfrac{1}{3}\left(\tfrac{a+b+c}{b+c} + \tfrac{a+b+c}{c+a} + \tfrac{a+b+c}{a+b}\right) \\ &= \tfrac{1}{3}\left(1 + \tfrac{a}{b+c} + 1 + \tfrac{b}{c+a} + 1 + \tfrac{c}{a+b}\right) = \tfrac{1}{3}(3 + L), \end{aligned}$$

па затоа $\frac{2}{3}L \ge 1$, односно $L \ge \frac{3}{2}$. Знак за равенство важи ако и само $a = b = c$. Зошто? ♦

Доказ 9. Неравенството е симетрично, па затоа без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека $a \ge b \ge c > 0$. Ги воведуваме ознаките $x = \frac{a}{c}$, $y = \frac{b}{c}$ и добиваме $x \ge y \ge 1$. Според тоа, неравенството (1) е еквивалентно на неравенството

$$\frac{\frac{a}{x}}{\frac{b}{c}+1} + \frac{\frac{b}{c}}{\frac{a}{c}+1} + \frac{1}{\frac{a}{c}+\frac{b}{c}} \ge \frac{3}{2}, \tag{6}$$

односно на неравенството

$$\frac{x}{y+1} + \frac{y}{x+1} \ge \frac{3}{2} - \frac{1}{x+y} . \tag{7}$$

Од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина добиваме

$$\frac{x+1}{y+1}+\frac{y+1}{x+1}\geq 2,$$

односно

$$\frac{x}{y+1}+\frac{y}{x+1}\geq 2-\frac{1}{x+1}-\frac{1}{y+1}. \qquad (8)$$

Ќе го докажеме неравенството

$$2-\frac{1}{x+1}-\frac{1}{y+1}\geq \frac{3}{2}-\frac{1}{x+y}. \qquad (9)$$

Неравенството (9) последователно е еквивалентно со неравенствата

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{y+1}\geq \frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+y},$$

$$\frac{y-1}{2(y+1)}\geq \frac{y-1}{(x+1)(x+y)}.$$

Но, $x+1\geq y+1>0$, $y-1\geq 0$ и $x+y\geq 2$, па затоа последното неравенство е точно, што значи дека е точно и неравенството (9). Конечно, од неравенствата (8) и (9) следува неравенството (7), кое е еквивалентно со неравенството (1). Јасно, знак за равенство важи ако и само ако $x=y=1$, т.е. ако и само ако $a=b=c$. ♦

Доказ 10. Имаме

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}-\frac{3}{2}=\frac{ac+a^2+b^2+bc}{(b+c)(c+a)}+\frac{2c-3a-3b}{a+b}=\frac{2(a+b)(ac+a^2+b^2+bc)+(2c-3a-3b)(ab+bc+ca+c^2)}{(a+b)(b+c)(c+a)}$$

$$=\frac{2(a^3+b^3+c^3)-a^2c-ab^2-a^2b-b^2c-ac^2-bc^2}{(a+b)(b+c)(c+a)}=\frac{2(a^3+b^3+c^3)-a^2c-ab^2-a^2b-b^2c-ac^2-bc^2}{(a+b)(b+c)(c+a)}$$

$$=\frac{(a^3+b^3-ab^2-a^2b)+(a^3+c^3-ac^2-a^2c)+(b^3+c^3-cb^2-c^2b)}{(a+b)(b+c)(c+a)}$$

$$=\frac{(a-b)(a^2-b^2)+(a-c)(a^2-c^2)+(b-c)(b^2-c^2)}{(a+b)(b+c)(c+a)}=\frac{(a-b)^2(a+b)+(a-c)^2(a+c)+(b-c)^2(b+c)}{(a+b)(b+c)(c+a)}\geq 0,$$

при што последното неравенство е точно бидејќи

$$(a-b)^2(a+b)+(a-c)^2(a+c)+(b-c)^2(b+c)\geq 0 \text{ и } (a+b)(b+c)(c+a)>0.$$

Конечно, од $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}-\frac{3}{2}\geq 0$ следува неравенството (1). ♦

На крајот од оваа статија ќе дадеме едно подобрување на неравенството (1), т.е. ќе докажеме дека е точно неравенството

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geq 3-\frac{9}{2}(ab+bc+ca). \qquad (10)$$

Доказ. Неравенството (1) е хомогено, па затоа можеме да претпоставиме дека $a+b+c=1$. Понатаму, според доказ 7 имаме $ab+bc+ca\leq \frac{1}{3}(a+b+c)^2$, па затоа $ab+bc+ca\leq \frac{1}{3}$. Сега ќе преминеме на доказот на неравенството (10). Неравенството (10) е еквивалентно со неравенството

$$\left(\frac{a}{b+c}+\frac{9a(b+c)}{4}\right)+\left(\frac{b}{c+a}+\frac{9b(c+a)}{4}\right)+\left(\frac{c}{a+b}+\frac{9c(a+b)}{4}\right)\geq 3\,. \qquad (11)$$

Од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува

$$\left(\frac{a}{b+c}+\frac{9a(b+c)}{4}\right)+\left(\frac{b}{c+a}+\frac{9b(c+a)}{4}\right)+\left(\frac{c}{a+b}+\frac{9c(a+b)}{4}\right)\geq 2\sqrt{\frac{9a^2(b+c)}{4(b+c)}}+2\sqrt{\frac{9b^2(c+a)}{4(c+a)}}+2\sqrt{\frac{9c^2(a+b)}{4(a+b)}}$$

$$=2\,\frac{3a}{2}+2\,\frac{3b}{2}+2\,\frac{3c}{2}=3(a+b+c)=3,$$

што значи дека е точно неравенството (11), односно точно е неравенството (10). Неравенството (10) е подобрување на неравенството (1) бидејќи од неравенството $ab+bc+ca\leq\frac{1}{3}$ следува $-\frac{9}{2}(ab+bc+ca)\geq-\frac{3}{2}$, односно $3-\frac{9}{2}(ab+bc+ca)\geq\frac{3}{2}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Arslanagić, Š.:** *Matematika za nadarene,* Bosanska riječ, Sarajevo, 2004
2. **Arslanagić, Š.:** *Matematička čitanka,* Grafičar promet doo, Sarajevo, 2008
3. **Carstensen, J., Muminagić, A.:** *Dobro poznati zadaci sa manje poznatim rješenjima,* Osječki matematički list, Vol. 6 (2006), Osijek, 2006
4. **Nesbitt, A. M.:** *Problem* 15114, Educational Times, 3 (1903), 37-38