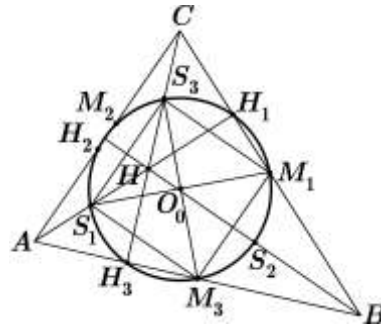


ОЈЛЕРОВА КРУЖНИЦА

Сега ќе зборуваме за девет точки во триаголникот коишто лежат на иста кружница. Во математиката таа кружница е позната како Ојлерова кружница. Во таа смисла ќе го разгледаме следново тврдење:

Средините на страните, подножјата на висините и средините на отсечките со крајни точки ортоцентарот H и темињата на триаголникот, лежат на иста кружница.

Доказ. Доволно е да се најде точка што е еднакво оддалечена од деветте точки. Ги означуваме средините на страните со M_1, M_2, M_3 , подножјата на висините со H_1, H_2, H_3 и средините на отсечките AH, BH, CH со S_1, S_2, S_3 , соодветно.



Отсечките S_1M_3 и S_3M_1 се средни отсечки на $\triangle ABH$ и $\triangle BCH$, соодветно, од каде што следува дека $S_1M_3 \parallel BH \parallel S_3M_1$. Аналогно добиваме $S_1S_3 \parallel AC \parallel M_1M_3$. Бидејќи $BH \perp AC$, тогаш $S_1M_3 \perp M_3M_1$. Од претходното следува дека четириаголникот $S_1M_3M_1S_3$ е правоаголник. Нека O_0 е пресекот на неговите дијагонали. Бидејќи оваа точка е еднакво оддалечена од точките S_1, M_3, M_1, S_3 следува дека тие точки лежат на кружницата $K_0(O_0, \overline{O_0M_1})$. Триаголникот $M_3H_3S_3$ е правоаголен со хипотенуза M_3S_3 . Од претходното следува дека $\overline{O_0H_3} = \overline{O_0M_3} = \overline{O_0M_1}$, т.е. точката H_3 лежи на K_0 . Аналогно заклучуваме дека и H_1 лежи на K_0 . На сличен начин се заклучува дека четириаголникот $M_2S_1S_2M_1$ е правоаголник. Оттука средината O_0 на S_1M_1 е средина на S_2M_2 и $\overline{O_0S_2} = \overline{O_0M_2} = \overline{O_0M_1}$ т.е. S_2 и M_2 исто така лежат на кружницата K_0 .

На крајот $\triangle M_2S_2H_2$ е правоаголен со хипотенуза M_2S_2 и оттука следува дека $\overline{O_0H_2} = \overline{O_0M_2} = \overline{O_0M_1}$, што значи дека и H_2 лежи на кружницата K_0 .

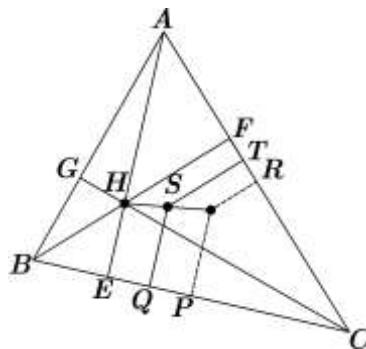
Врз основа на претходното заклучуваме дека деветте точки лежат на кружница со центар во точката O_0 .

Задачи

1. Да се докаже дека центарот на кружницата на деветте точки за триаголникот лежи на ојлеровата права.

Упатство. Бидејќи симетралата на тетивата на кружницата минува низ нејзиниот центар, јасно е дека нормалите подигнати во точките Q и T (среди на тетивите EP и FR) ќе минуваат низ центарот S на таа кружница.

Бидејќи O е центарот на опишаната кружница околу $\triangle ABC$ и H е неговиот ортоцентар, следува дека точката S е средина на отсечката HO (зошто?). Тоа значи дека S лежи на ојлеровата права.



2. За секој триаголник центарот O на опишаната кружница, тежиштето M , центарот O_0 на кружницата на деветте точки и ортоцентарот лежат на една права, и за нив важи $\overline{OM} : \overline{MO_0} : \overline{O_0H} = 2:1:3$.