



Задачи

1. Две кружности ω_1 и ω_2 се сечат во точките A и B . Нека точката C лежи на тангентата на ω_1 низ точката A така што $\angle ABC = 90^\circ$. Произволна права l минува низ точката C и ја сече кружницата ω_2 во точки P и Q . Правите AP и AQ , освен во точката A ја сечат кружницата ω_1 и во точките X односно Z , соодветно. Нека Y е подножјето на нормалата повлечена од точката A кон l . Докажи дека точките X, Y и Z се колинеарни.

2. Дали е точно тврдењето дека кај секој конвексен n -аголник, $n > 3$, постои теме и дијагонала што минува низ него, така што аглиите што ги зафаќа оваа дијагонала со двете страни за кои тоа теме е заедничко се остри агли? Ако одговорот е потврден, докажи го тврдењето!

3. Нека точките O_1 и O_2 се центри на кружниците ω_1 и ω_2 , соодветно. Овие две кружности се сечат во точките X и Y . Нека AB е заедничката тангента на кружниците, така што точката A лежи на ω_1 , а точката B лежи на ω_2 . Нека тангентите на кружниците ω_1 и ω_2 во X ја сечат правата O_1O_2 во точките L и K , соодветно. Нека правата BL освен во точката B ја сече кружницата ω_2 и во точката M , а правата AK освен во точката A ја сече ω_1 и во точката N . Докажи дека правите AM, BN и O_1O_2 се сечат во една точка.

4. Нека е даден остроаголен триаголник ABC , кој не е рамнокрак. Нека Γ е неговата опишана кружница, точката M е средина на отсечката BC , а точката N е средина на лакот BC од кружницата Γ , што не ја содржи точката A . Нека X и Y се точки кои лежат на Γ , такви што $BX \parallel CY \parallel AM$. Да претпоставиме дека постои точка Z која што лежи на отсечката BC , така што BC е тангента на опишаната кружница околу $\triangle XYZ$. Нека ω е опишаната кружница околу $\triangle ZMN$. Нека правата AM освен во точката M , ја сече кружницата ω и во точката P . Нека K е точка од ω , таква што $KN \parallel AM$, ω_b е кружница што минува низ точките B и X , а тангентата ѝ е BC , и ω_c е кружница што минува низ точките C и Y , а тангентата ѝ е BC . Докажи дека кружницата со центар во точката K и радиус KP ги допира трите кружности ω_b , ω_c и Γ .

5. Нека точките A, B и C лежат на парабола Δ , така што ортоцентарот на $\triangle ABC$, H , се совпаѓа со фокусот на параболата Δ . Докажи дека со менување на положбата на точките A, B и C на параболата Δ , така што ортоцентарот на $\triangle ABC$ секогаш да е во точката H , радиусот на впишаната кружница во $\triangle ABC$ останува непроменет.

Време за работа: 4 часа и 30 минути.

Секоја точно решена задача се вреднува со 8 поени.