Томи Димовски
Ана Димовска
Скопје

КРИВИ ОД ВТОР РЕД

Во оваа статија посветуваме внимание на дел од аналитичката геометрија во рамнина, конкретно на кривите од втор ред. Разгледуваме едноставни техники за утврдување на различните типови на криви од втор ред.

Крива од втор ред во рамнина се нарекува крива која во однос на избран координатен систем е зададена со равенка од втор степен. Општа равенка од втор степен по променливите x и y е равенка од облик

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0,$$

каде A,B,C,D,E и F се реални броеви такви што

$$A^2+B^2+C^2>0.$$

Се наметнува прашањето: како крива зададена во ваков облик да ја сведеме во некој од познатите облици? Овде новите координати ги означуваме со x' и y', а познати ни се:

$(x')^2+(y')^2=1$ *равенка на елипса*;

$(x')^2=y'$ *равенка на парабола*;

$x'\cdot y'=1$ *равенка на хипербола*.

Ја разгледуваме детерминантата

$$\Delta=\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}.$$

1. Ако $\Delta=0$, тогаш кривата е од параболичен тип. Можни се четири случаи.

1.1. Равенката претставува пар паралелни прави.

Пример 1. Да ја разгледаме равенката

$$x^2+4xy+4y^2+2x+4y=0.$$

Бидејќи

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}=0,$$

кривата е од параболичен тип. Ја трансформираме дадената равенка и добиваме еквивалентна равенка

$$(x+2y)^2+2(x+2y)=0\,.$$

Воведуваме смена $x+2y=t$ и ја добиваме квадратната равенка $t^2+2t=0$, чии решенија се $t_1=-2$ и $t_2=0$. Според тоа,

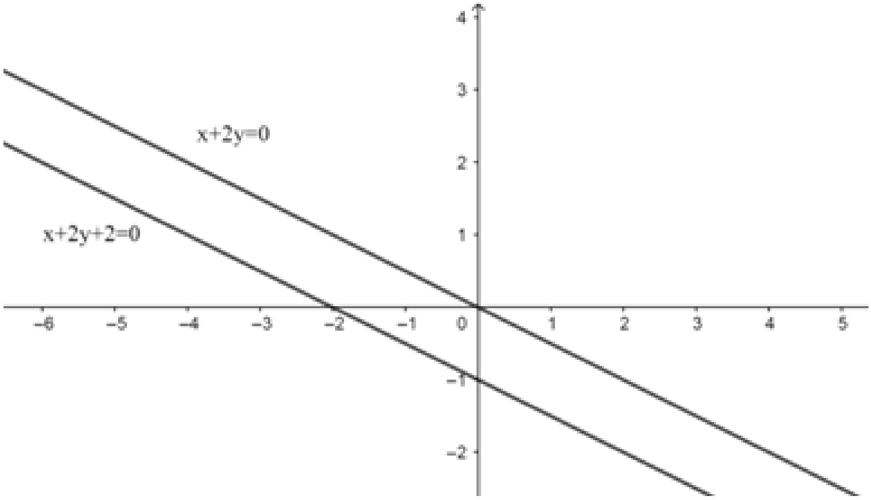
$$(x+2y+2)(x+2y)=0\,,$$

односно

$$\left[\begin{array}{l} x+2y+2=0 \\ \quad x+2y=0 \end{array}\right. .$$

Тоа значи дека дадената равенка претставува пар паралелни прави

$$p\equiv x+2y+2=0 \text{ и } q\equiv x+2y=0\,.$$



1.2. Равенката претставува пар прави кои се совпаѓаат.

Пример 2. Да ја разгледаме равенката

$$16x^2+8xy+y^2-16x-4y+4=0\,.$$

Бидејќи

$$\Delta=\begin{vmatrix} 16 & 4 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}=0\,,$$

кривата е од параболичен тип. Ја трансформираме дадената равенка и добиваме еквивалентна равенка

$$(4x+y)^2-4(4x+y)+4=0\,.$$

Воведуваме смена $4x+y=t$ и ја добиваме квадратната равенка

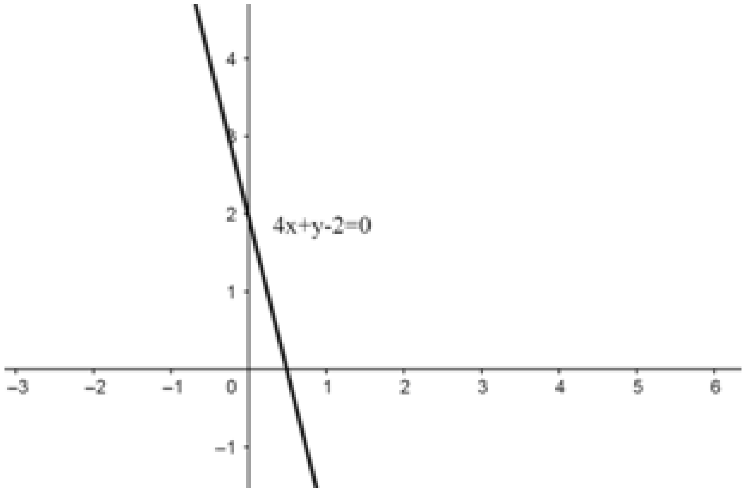
$$t^2-4t+4=0\,,$$

чии решенија се $t_{1/2} = 2$. Според тоа,

$$(4x + y - 2)(4x + y - 2) = 0,$$

односно дадената равенка претставува пар прави кои се совпаѓаат

$$p \equiv 4x + y - 2 = 0 \text{ и } q \equiv 4x + y - 2 = 0.$$



1.3. Равенката е равенка на ништо (не постојат реални броеви кои ја задоволуваат дадената равенка).

Пример 3. Да ја разгледаме равенката

$$4x^2 + 20xy + 25y^2 + 16x + 40y + 17 = 0.$$

Бидејќи

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 10 \\ 10 & 25 \end{vmatrix} = 0,$$

кривата е од параболичен тип. Ја трансформираме дадената равенка и добиваме еквивалентна равенка

$$(2x + 5y)^2 + 8(2x + 5y) + 17 = 0.$$

Воведуваме смена $2x + 5y = t$ и ја добиваме квадратната равенка $t^2 + 8t + 17 = 0$. Но,

$$t^2 + 8t + 17 = (t + 4)^2 + 1 > 0,$$

од каде следува дека не постојат реални броеви кои ја задоволуваат дадената равенка, односно дадената равенка е равенка на ништо.

1.4. Равенката е парабола.

Пример 4. Да ја разгледаме равенката

$$x^2+2xy+y^2+x-2y-3=0\,.$$

Бидејќи

$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=0\,,$$

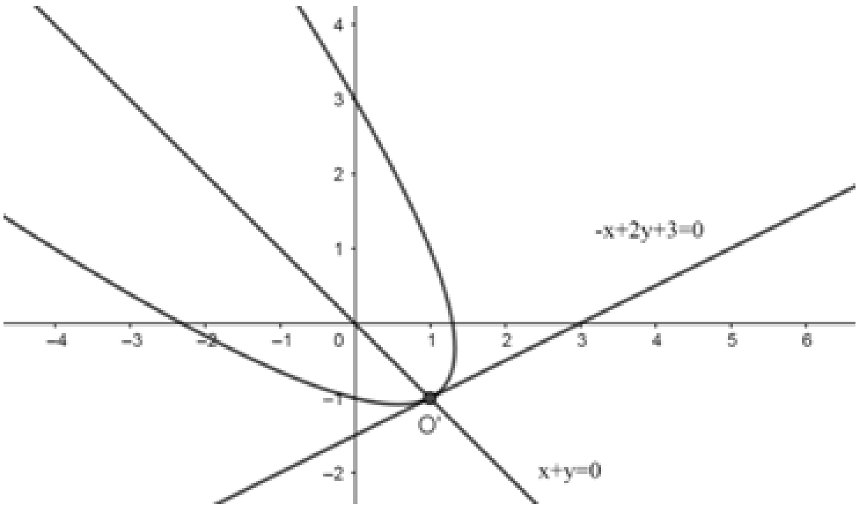
кривата е од параболичен тип. Ја трансформираме дадената равенка и добиваме еквивалентна равенка $(x+y)^2=2y-x+3$. Воведуваме смена

$$x'=x+y\,,\; y'=2y-x+3$$

и добиваме $(x')^2=y'$. Очигледно е дека станува збор за парабола во координатен систем со оски

$$x'=x+y=0 \;\text{ и }\; y'=2y-x+3=0$$

и координатен почеток $O'(1,-1)$, кој се добива како пресек на новите координатни оски.



2. Ако $\Delta>0$, тогаш кривата е од елиптичен тип. Можни се три случаи.

2.1. Равенката претставува точка.

Пример 5. Да ја разгледаме равенката

$$5x^2-2xy+2y^2+\tfrac{6}{5}y+\tfrac{1}{5}=0\,.$$

Бидејќи

$$\Delta=\begin{vmatrix}5 & -1\\ -1 & 2\end{vmatrix}=9>0\,,$$

кривата е од елиптичен тип. Дадената равенка е еквивалентна со

$$25x^2-10xy+10y^2+6y+1=0,$$

односно

$$(5x-y)^2+(3y+1)^2=0.$$

Според тоа, точката $(-\frac{1}{15},-\frac{1}{3})$ е единствената која ја задоволува дадената равенка, односно равенката претставува точка.

2.2. Равенката е равенка на ништо (не постојат реални броеви кои ја задоволуваат дадената равенка).

Пример 6. Да ја разгледаме равенката

$$5x^2+14xy+10y^2+2x+2y+7=0.$$

Бидејќи

$$\Delta=\begin{vmatrix}5 & 7\\ 7 & 10\end{vmatrix}=1>0,$$

кривата е од елиптичен тип. Дадената равенка е еквивалентна со

$$25x^2+70xy+50y^2+10x+10y+35=0,$$

односно

$$(5x+7y)^2+y^2+10x+10y+35=0.$$

Воведуваме помошни константи λ,μ и добиваме

$$(5x+7y+\lambda)^2+(y+\mu)^2+10x+10y+35-\lambda^2-10\lambda x-14\lambda y-2\mu y-\mu^2=0,$$

односно

$$(5x+7y+\lambda)^2+(y+\mu)^2+(10-10\lambda)x+y(10-14\lambda-2\mu)+35-\lambda^2-\mu^2=0.$$

Константите λ,μ ги добиваме така што

$$\begin{cases}10-10\lambda=0\\ 10-14\lambda-2\mu=0\end{cases}.$$

Според тоа, $\lambda=1,\mu=-2$, а дадената равенка преминува во облик

$$(5x+7y+1)^2+(y-2)^2=-20.$$

Следува дека не постојат реални броеви кои ја задоволуваат дадената равенка, односно дадената равенка е равенка на ништо.

2.3. Равенка на елипса.

Пример 7. Да ја разгледаме равенката

$$x^2+xy+y^2+2x+3y-3=0.$$

Бидејќи

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{vmatrix} = \frac{3}{4} > 0,$$

кривата е од елиптичен тип. Дадената равенка е еквивалентна со

$$4x^2 + 4xy + 4y^2 + 8x + 12y - 12 = 0,$$

односно

$$(2x + y)^2 + 3y^2 + 8x + 12y - 12 = 0.$$

Воведуваме помошни константи λ, μ и добиваме

$$(2x + y + \lambda)^2 + (\sqrt{3}y + \mu)^2 - 2(2x + y)\lambda - \lambda^2 - 2\sqrt{3y}\mu - \mu^2 + 8x + 12y - 12 = 0,$$

односно

$$(2x + y + \lambda)^2 + (\sqrt{3}y + \mu)^2 + (8 - 4\lambda)x + (12 - 2\lambda - 2\sqrt{3}\mu)y - \lambda^2 - \mu^2 - 12 = 0.$$

Константите λ, μ ги добиваме така што

$$\begin{cases} 8 - 4\lambda = 0 \\ 12 - 2\lambda - 2\sqrt{3}\mu = 0 \end{cases}.$$

Според тоа, $\lambda = 2, \mu = \frac{4}{\sqrt{3}}$, а дадената равенка преминува во облик

$$(2x + y + 2)^2 + (\sqrt{3}y + \frac{4}{\sqrt{3}})^2 = \frac{64}{3},$$

односно

$$\left(\frac{2x+y+2}{\frac{8}{\sqrt{3}}}\right)^2 + \left(\frac{3}{8}y + \frac{1}{2}\right)^2 = 1.$$

Воведуваме смена

$$x' = \frac{2x+y+2}{\frac{8}{\sqrt{3}}}, \quad y' = \frac{3}{8}y + \frac{1}{2}$$

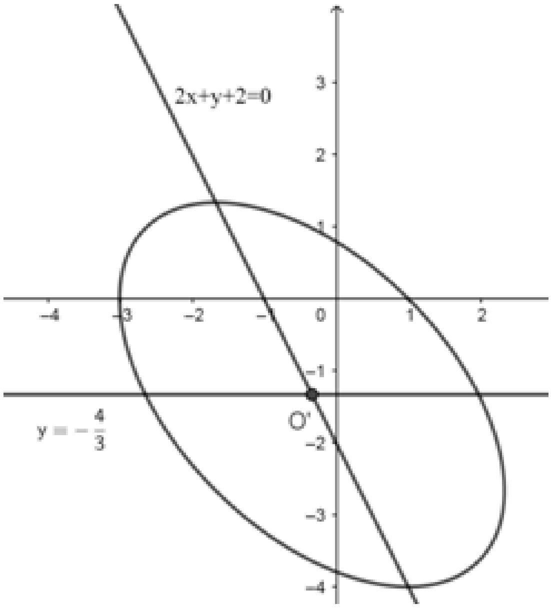
и добиваме

$$(x')^2 + (y')^2 = 1,$$

што претставува равенка на елипса. Новите координатни оски се

$$x' = \frac{2x+y+2}{\frac{8}{\sqrt{3}}} = 0 \text{ и } y' = \frac{3}{8}y + \frac{1}{2} = 0$$

и новиот координатен почеток е $O'(-\frac{1}{3}, -\frac{4}{3})$, кој се добива како пресек на новите координатни оски.



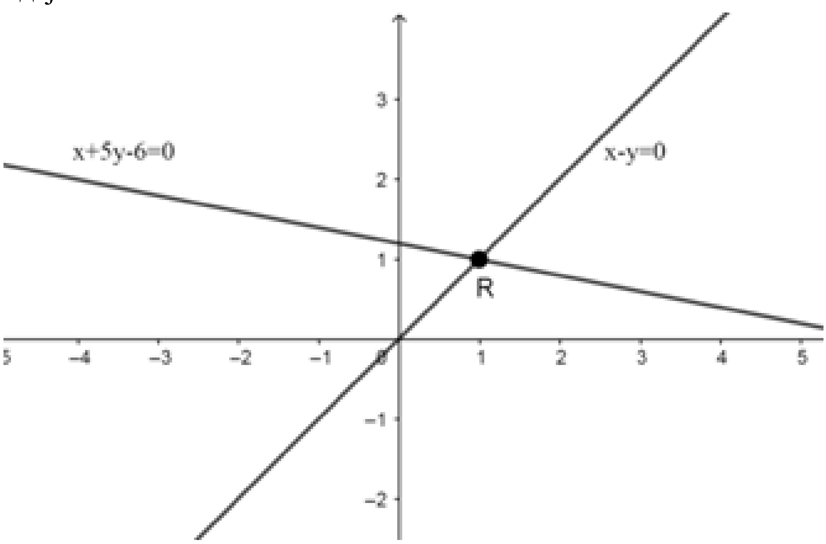
3. Ако $\Delta < 0$, тогаш кривата е од хиперболичен тип. Можни се два случаи.

3.1. Равенката претставува пар прави кои се сечат.

Пример 8. Да ја разгледаме равенката

$$x^2 + 4xy - 5y^2 - 6x + 6y = 0 .$$

Бидејќи



$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} = -9 < 0,$$

кривата е од хиперболичен тип. Дадената равенка е еквивалентна со

$$(x-y)(x+5y-6)=0,$$

односно

$$\left[\begin{array}{c} x-y=0 \\ x+5y-6=0 \end{array}\right. .$$

Тоа значи дека дадената равенка претставува пар прави $p \equiv x-y=0$ и $q \equiv x+5y-6=0$ кои се сечат во точка $R(1,1)$.

3.2. Равенката е хипербола.

Пример 9. Да ја разгледаме равенката

$$3x^2+5xy-2y^2+8x-5y-4=0.$$

Бидејќи

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & \frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} & -2 \end{vmatrix} = -12,25 < 0,$$

кривата е од хиперболичен тип. Дадената равенка е еквивалентна со

$$(3x-y)(x+2y)+8x-5y-4=0.$$

Воведуваме помошни константи λ, μ и добиваме

$$(3x-y+\lambda)(x+2y+\mu)-\lambda(x+2y)-\mu(3x-y)-\lambda\mu+8x-5y-4=0,$$

односно

$$(3x-y+\lambda)(x+2y+\mu)-(8-3\mu-\lambda)x+(\mu-2\lambda-5)y-\lambda\mu-4=0.$$

Константите λ, μ ги добиваме така што

$$\begin{cases} 8-3\mu-\lambda=0 \\ \mu-2\lambda-5=0 \end{cases}.$$

Според тоа, $\lambda=-1, \mu=3$, а дадената равенка преминува во облик

$$(3x-y-1)(x+2y+3)=1.$$

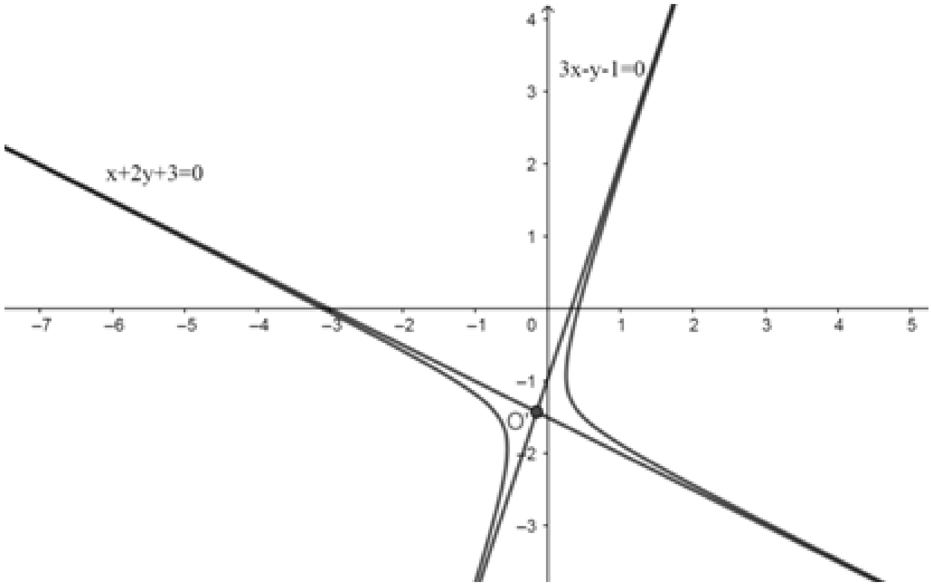
Воведуваме смена

$$x'=3x-y-1,\ y'=x+2y+3$$

и добиваме $x' \cdot y' = 1$, што претставува хипербола со асимптоти

$$x'=3x-y-1=0 \text{ и } y'=x+2y+3=0$$

чиј пресек е $O'(-\frac{10}{7}, -\frac{1}{7})$.



ЗАДАЧИ ЗА САМОСТОЈНА РАБОТА

1. Кои криви од втор ред се зададени со равенките:

а) $x^2+4xy+4y^2-x=0$;

б) $x^2+4xy+3y^2-3=0$;

в) $2x^2+2xy+y^2=0$;

г) $x^2+y^2+x-y+1=0$;

д) $x^2+2xy+y^2+2x+2y+1=0$;

ѓ) $x^2-2xy+y^2+6x-6y+8=0$;

е) $2x^2+2xy+y^2+5x+6y+1=0$.

Литература

[1] Улчар, Ј (1995). Аналитичка геометрија со векторска алгебра, РЕ Нумерус, Скопје

[2] Малчески, Р., Малческа, В. (2012). Математика 2 – векторска и линеарна алгебра (второ издание), Армаганка, Скопје

[3] Тренчевски, Г., Малчески, Р., Тренчевски, К. (2003). Математика 3, (авторизиран ракопис), Скопје, armaganka.org.mk