

XXXIX олимпијада

1. Во конвексен четириаголник $ABCD$ дијагоналите AC и BD се нормални, а спротивните страни AB и CD не се паралелни. Пресечната точка P на симетралите на страните AB и CD лежи во внатрешноста на четириаголникот $ABCD$. Докажи дека околу четириаголникот може да се опише кружница ако и само ако триаголниците ABP и CDP имаат еднакви плоштини.

Решение. Нека E е пресечната точка на AC и BD . Без губење од општоста можеме да претпоставиме дека точката P лежи во триаголникот ABE . Со M и N ги означуваме подножјата на нормалите спуштени од P кон AC и BD . Тогаш

$$\begin{aligned} 2S_{ABP} &= 2S_{ABE} - 2S_{PAE} - 2S_{PBE} \\ &= (\overline{AN} + \overline{PM})(\overline{BM} + \overline{PN}) - (\overline{AN} + \overline{PM})\overline{PN} - (\overline{BM} + \overline{PN})\overline{PM} \\ &= \overline{AN} \cdot \overline{BM} - \overline{PM} \cdot \overline{PN}. \end{aligned}$$

Аналогно $2S_{CDP} = \overline{CN} \cdot \overline{DM} - \overline{PM} \cdot \overline{PN}$.

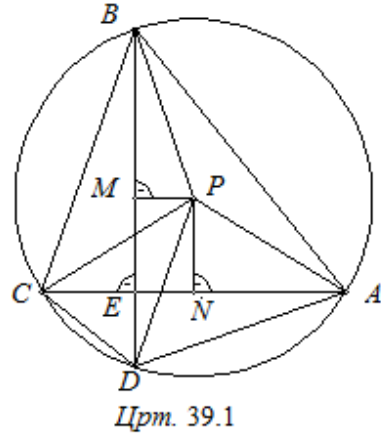
Од условот $AC \perp BD$ следува дека

$$2(S_{ABP} - S_{CDP}) = \overline{AN} \cdot \overline{BM} - \overline{CN} \cdot \overline{DM} \quad (1)$$

Нека $\overline{PA} = \overline{PB}$ и $\overline{PC} = \overline{PD}$. Ако $ABCD$ е тетивен четириаголник, тогаш P е центар на опишаната кружница и $\overline{AN} = \overline{CN}$, $\overline{BM} = \overline{DM}$. Сега, од (1) заклучуваме дека $S_{ABP} = S_{CDP}$. Обратно, нека $S_{ABP} = S_{CDP}$ и да претпоставиме дека, на пример, $\overline{PA} > \overline{PC}$. Тогаш $\overline{AN} > \overline{CN}$, $\overline{BM} > \overline{DM}$, па затоа

$$\overline{AN} \cdot \overline{BM} > \overline{CN} \cdot \overline{DM}$$

што противречи на равенството (1).



2. На еден натпревар учествувале a натпреварувачи, кои биле оценувани од b судии, каде $b \geq 3$ е непарен број. Секој судија го оценува секој натпреварувач со „положил“ или „не положил“. Нека k е број, таков што оценките на било кои двајца судии се совпаѓаат кај најмалку k натпреварувачи. Докажи дека $\frac{k}{a} \geq \frac{b-1}{2b}$.

Решение. За секој $i \in \{1, 2, \dots, a\}$ нека i -тиот натпреварувач добил x_i оценки „положил“ и y_i оценки „не положил“. Тогаш $x_i + y_i = b$ и бројот на парови од судии кои го оцениле исто овој натпреварувач е

$$\binom{x_i}{2} + \binom{y_i}{2} = \frac{1}{2}(x_i^2 + y_i^2 - x_i - y_i) \geq \frac{1}{4}((b-1)^2 - 1)$$

Бидејќи b е непарен број, следува дека

$$\binom{x_i}{2} + \binom{y_i}{2} \geq \frac{1}{4}(b-1)^2.$$

Конечно, го обиваме неравенството

$$k \binom{b}{2} \geq \sum_{i=1}^a (\binom{x_i}{2} + \binom{y_i}{2}) \geq \frac{a(b-1)^2}{4},$$

кое е еквивалентно со неравенството кое што требаше да се докаже.

3. За секој позитивен цел број со $d(n)$ ќе го означиме бројот на позитивните цели делители на n (вклучувајќи ги 1 и n). Најди ги сите позитивни цели броеви k за кои постои позитивен цел број n , така што $\frac{d(n^2)}{d(n)} = k$.

Решение. Нека $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_t^{k_t}$ е каноничното разложување на n на прости множители. Тогаш

$$d(n) = (k_1 + 1)(k_2 + 1) \dots (k_t + 1) \quad \text{и} \quad d(n^2) = (2k_1 + 1)(2k_2 + 1) \dots (2k_t + 1).$$

Следува дека бараните броеви се непарни. Обратно, нека k е непарен позитивен цел број. Со индукција ќе докажеме дека постои n така што $\frac{d(n^2)}{d(n)} = k$.

Бидејќи $\frac{d(1^2)}{d(1)} = 1$, следува дека тврдењето е исполнето за $k = 1$.

Нека $k + 1 = 2^r k_0$ каде што $k_0 < k$ е непарен број.

Од индуктивната претпоставка следува дека постои n_0 така што $\frac{d(n_0^2)}{d(n_0)} = k_0$.

Ставаме $x_0 = (2^r - 1)k_0 - 1$ и $x_i = 2^i x_0, 1 \leq i \leq r$. Нека $p_0, p_1, \dots, p_{r-1}$ се прости броеви кои не се делители на n_0 . Го разгледуваме бројот $n = p_0^{x_0} \dots p_{r-1}^{x_{r-1}} \cdot n_0$. Тогаш

$$\frac{d(n^2)}{d(n)} = \frac{2x_0+1}{x_0+1} \dots \frac{2x_{r-1}+1}{x_{r-1}+1} \frac{d(n_0^2)}{d(n_0)} = \frac{x_1+1}{x_0+1} \frac{x_2+1}{x_1+1} \dots \frac{x_r+1}{x_{r-1}+1} k_0 = \frac{x_r+1}{x_0+1} k_0.$$

Да забележиме дека

$$\frac{x_r+1}{x_0+1} k_0 = \frac{2^r x_0+1}{(2^r-1)k_0} k_0 = \frac{2^r(x_0+1)}{2^r-1} - 1 = 2^r k_0 - 1 = k.$$

Значи $\frac{d(n^2)}{d(n)} = k$, што требаше да се докаже. Бараните броеви се сите непарни природни броеви.

4. Најди ги сите парови (a, b) од цели броеви, такви што $ab^2 + b + 7$ е делител на $a^2b + a + b$.

Решение. Нека $ab^2 + b + 7$ е делител на $a^2b + a + b$. Тогаш, бројот

$$b(a^2b + a + b) - a(ab^2 + b + 7) = b^2 - 7a$$

е делив со $ab^2 + b + 7$. Бидејќи $a \geq 1$, следува дека $ab^2 + b + 7 > b^2 - 7a$, односно ако $b^2 - 7a \geq 0$, заклучуваме дека $b^2 - 7a = 0$. Значи $b = 7a$, $a = 7c^2$ и лесно се проверува дека парот $(7c^2, 7c)$ (c е цел број) ги задоволува условите од задачата. Да претпоставиме дека $b^2 - 7a < 0$. Тогаш целиот број $7a - b^2$ е помал од $7a$ и е делив со $ab^2 + b + 7$. Следува $b = 1$ или $b = 2$ бидејќи во спротивно $ab^2 + b + 7 > 9a$. Лесно се проверува дека случајот $b = 2$ не е можен, а за $b = 1$ добиваме две решенија $(11, 1)$ и $(49, 1)$.

5. Нека I е центарот на впишаната кружница во триаголникот ABC која ги допира страните BC , CA и AB во точките K , L и M соодветно. Правата која што минува низ B и е паралелна со MK ги сече правите LM и LK во точките R и S . Докажи дека $\angle RIS$ е остар.

Решение. Бидејќи

$$\angle RMB = 90^\circ - \frac{\alpha}{2},$$

$$\angle RBM = \angle BMK = 90^\circ - \frac{\beta}{2},$$

$$\angle MRB = 90^\circ - \frac{\gamma}{2},$$

$$\angle SKB = 90^\circ - \frac{\gamma}{2},$$

$$\angle SBK = \angle MKB = 90^\circ - \frac{\beta}{2},$$

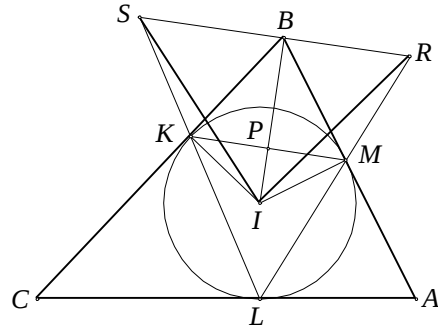
$$\angle KSB = 90^\circ - \frac{\alpha}{2},$$

следува дека триаголниците RMB и KBS се слични. Оттука добиваме

$\overline{RB} \cdot \overline{BS} = \overline{BK}^2$, затоа што $\overline{BK} = \overline{BM}$. Бидејќи $BI \perp MK$ (BI е симетрала на аголот MBK во рамнокракиот триаголник MKB) следува

$$\begin{aligned} \overline{RI}^2 + \overline{SI}^2 - \overline{RS}^2 &= \overline{RB}^2 + \overline{BI}^2 + \overline{BS}^2 + \overline{BI}^2 - (\overline{RB} + \overline{BS})^2 = 2(\overline{BI}^2 - \overline{RB} \cdot \overline{BS}) \\ &= 2(\overline{BI}^2 - \overline{BK}^2) = 2\overline{IK}^2 > 0. \end{aligned}$$

Оттука следува дека аголот RIS е остар.



Црп. 39.2.

6. Ги разгледуваме сите функции $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ каде што

$$f(n^2 f(m)) = m(f(n))^2$$

за произволни $m, n \in \mathbb{N}$. Најди ја најмалата можна вредност на $f(1998)$.

Решение. Прво ќе ги определиме функциите кои ги задоволуваат условите на задачата.

Нека $f(1) = a$. За $n = m = 1$ добиваме $f(f(m)) = a^2 m$ и $f(an^2) = (f(n))^2$.
 Тогаш
 $(f(m))^2 (f(n))^2 = (f(m))^2 f(an^2) = f(m^2 f(f(an^2))) = f(m^2 a^3 n^2) = (f(amn))^2$
 т.е.

$$f(amn) = f(m)f(n) .$$

За $n = 1$ имаме $f(am) = af(m)$, па значи

$$af(mn) = f(m)f(n) \quad (1)$$

Ќе докажеме дека a е делител на $f(n)$ за секој $n \in \mathbb{N}$. Нека p е произволен прост број и α и β се степените показатели на p во каноничното разложување на a и $f(n)$. Од (1), со индукција, следува дека $(f(n))^k = a^{k-1} f(n^k)$ за секој природен број k . Тогаш $k\beta \geq (k-1)\alpha$, што е можно само ако $\beta \geq \alpha$. Оттука следува дека a е делител на $f(n)$.

Ставаме $g(n) = \frac{f(n)}{a}$. Од докажаното, следува дека $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$. Понатаму, лесно се покажува дека

$$g(mn) = g(m)g(n) \quad (2)$$

$$g(g(m)) = m \quad (3)$$

Обратно, ако $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ е функција која ги задоволува равенствата (2) и (3), тогаш за секој $\alpha \in \mathbb{N}$ функцијата $f(n) = \alpha g(n)$ ги задоволува условите од задачата.

Сега ќе го најдеме општиот облик на функциите $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ кои ги задоволуваат равенствата (2) и (3). За $n = m = 1$ од (2) следува

$$g(1) = 1 \quad (4)$$

Со P ќе го означиме множеството од прости броеви. Ќе докажеме дека $g(p) \in P$ за секој $p \in P$. Навистина, ако $g(p) = uv$, од (3) и (2) следува дека $p = g(g(p)) = g(uv) = g(u)g(v)$. Без губење од општоста можеме да претпоставиме дека $g(u) = 1$, па оттука добиваме $u = g(g(u)) = g(1) = 1$, односно $g(p) \in P$. Ако $n \geq 2$ е произволен природен број и $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}$ е неговото канонично разложување на прости множители, од (2) добиваме:

$$g(n) = (g(p_1))^{\alpha_1} \dots (g(p_k))^{\alpha_k} \quad (5)$$

Од докажаното, следува дека, ако $g: P \rightarrow P$ е произволна функција таква што $g(g(p)) = p$, за секој $p \in P$, тогаш со помош на равенствата (4) и (5) g може еднозначно да се продолжи на множеството на природните броеви. Директно се проверува дека така добиената функција $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ ги задоволува равенствата (2) и (3).

Сега ќе покажеме дека најмалата можна вредност на $f(1998)$ е 120. Бидејќи

$$f(1998) = f(2 \cdot 3^3 \cdot 37) = f(1)g(2)(g(3))^3g(37) \geq 1 \cdot 3 \cdot 2^3 \cdot 5 = 120,$$

останува да конструираме функција f која ги задоволува условите од задачата и за која важи $f(1998) = 120$. Ставаме $f(1) = 1, f(2) = 3, f(3) = 2, f(37) = 5$ и $f(p) = p$ за сите останати прости броеви p . Јасно е дека $f(f(p)) = p$ за секој $p \in P$. На овој начин е дефинирана функција $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ која ги задоволува условите од задачата и $f(1998) = 120$.