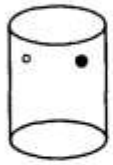
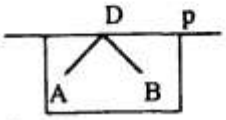
Ристо Малчески

КАКО ДА И ПОМОГНЕТЕ НА МУВА КОЈА НЕ ЗНАЕ ГЕОМЕТРИЈА



Црт. 1

На внатрешниот ѕид на стаклена чаша со висина 20 cm и дијаметар 10 cm се наоѓа капка мед оддалечена 3 cm од горниот раб на чашата (црт. 1). На надворешната страна во точка која се наоѓа точно наспроти капката мед се наоѓа мува. Мувата до медот сигурно нема да дојде по најкусиот пат, бидејќи не знае геометрија и таа ќе лети до медот. Случајот на летање ќе го исклучиме. Дали можете да и помогнете на мувата и да и го покажете најкусиот пат по кој може да стигне до медот?

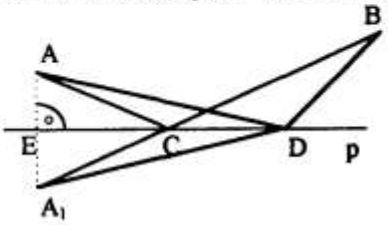


Црт. 2

Најкусиот пат можеме да го најдеме на следниот начин: Ако замислиме дека обиколката на чашата е развиена во правоаголник, капката се наоѓа во точката A, а мувата во точката B (црт. 2), тогаш на правата p треба да најдеме точка D, таква што збирот $\overline{AD}+\overline{BD}$ е најмал.

Всушност, нашата задача ја сведовме на следната:

Задача 1. *Дадена е права p и точки A и B кои не припаѓаат на p и лежат во иста полурамнина одредена со p. На правата p одредете точка C таква што збирот $\overline{AC}+\overline{BC}$ да биде најмал.*



Црт. 3

Решение. Конструираме точка A_1 симетрична на точката A во однос на правата p (види црт. 3: $AA_1 \perp p, \overline{AE} = \overline{EA_1}$). Пресечната точка на отсечката A_1B и правата p е бараната точка C.

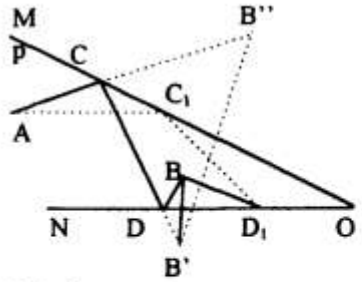
Навистина, нека D е произволна точка на правата p. Да го споредиме збирот $\overline{AD}+\overline{BD}$ со збирот $\overline{AC}+\overline{BC}$. Бидејќи $\overline{AC}=\overline{A_1C}$ добиваме

$$\overline{AC}+\overline{BC}=\overline{A_1C}+\overline{BC}=\overline{A_1B}.$$

Но, $\overline{AD}=\overline{A_1D}$, па затоа $\overline{AD}+\overline{BD}=\overline{A_1D}+\overline{BD}$. Меѓутоа за страните на триаголникот A_1DB важи релацијата $\overline{A_1B}<\overline{A_1D}+\overline{BD}$, па затоа $\overline{AC}+\overline{BC}<\overline{AD}+\overline{BD}$.

Во продолжение ќе разгледаме уште пет задачи во кои се јавува проблемот на најмало растојание.

Задача 2. *Нека A и B се две точки во внатрешноста на остриот агол MON. На краците OM и ON одредете точки C и D такви што збирот $\overline{AC}+\overline{CD}+\overline{DB}$ е најмал.*



Црт. 4

Решение. Нека е B' точка симетрична на точката B во однос на ON, а B'' точка симетрична на точката B' во однос на OM (црт. 4). Ќе докажеме дека бараната точка C на OM е пресек на отсечката AB'' и OM и дека точката D на ON е пресек на отсечката CB' и ON.

Ќе докажеме дека за било кои две точки $C_1 \in OM, C_1 \neq C$ и $D_1 \in ON, D_1 \neq D$ збирот $\overline{AC_1} + \overline{C_1D_1} + \overline{D_1B}$ е поголем од збирот $\overline{AC} + \overline{CD} + \overline{DB}$. Навистина, ако ги искористиме релациите

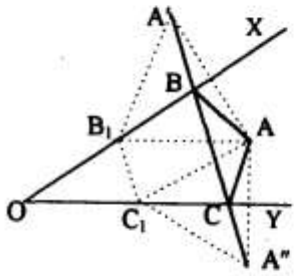
$$\overline{C_1D_1} + \overline{D_1B'} > \overline{C_1B'},\quad \overline{C_1B'} = \overline{C_1B''},\quad \overline{AC_1} + \overline{C_1B''} > \overline{AB''},$$
$$\overline{CB''} = \overline{CB'},\quad \overline{DB} = \overline{DB'},\quad \overline{D_1B} = \overline{D_1B'}$$

добиваме:

$$\overline{AC_1} + \overline{C_1D_1} + \overline{D_1B} = \overline{AC_1} + \overline{C_1D_1} + \overline{D_1B'} > \overline{AC_1} + \overline{C_1B'} = \overline{AC_1} + \overline{C_1B''} >$$
$$> \overline{AB''} = \overline{AC} + \overline{CB''} = \overline{AC} + \overline{CB'} =$$
$$= \overline{AC} + \overline{CD} + \overline{DB'} = \overline{AC} + \overline{CD} + \overline{DB}.$$

Задача 3. *Во внатрешноста на остриот агол XOY се наоѓа точка A. Најдете точки $B \in OX$ и $C \in OY$ такви што збирот $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA}$ да биде најмал.*

Решение. Нека точките A' и A'' се симетрични на точката A во однос на краците OX и OY, соодветно. Ќе докажеме дека бараните точи B и C се пресеците на отсечката $A'A''$ со краците на аголот OX и OY, соодветно.



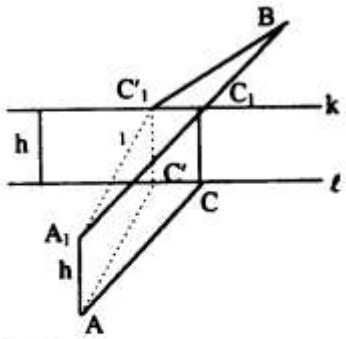
Црт. 5

Да избереме произволни точки $B_1 \in OX$ и $C_1 \in OY$, такви што $B_1 \neq B$ и $C_1 \neq C$. Користејќи го фактот дека најмалото растојание меѓу две точки е отсечката која ги поврзува и равенствата $\overline{AB} = \overline{A'B}$, $\overline{AC} = \overline{A''C}$ добиваме (цтр. 5):

$$\overline{A'B_1} + \overline{B_1C_1} + \overline{C_1A''} > \overline{A'A''} = \overline{A'B} + \overline{BC} + \overline{CA''} =$$
$$= \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA}.$$

Од произволноста на точките B_1 и C_1 следува дека збирот $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA}$ е навистина најмал.

Задача 4. *Местата A и B се наоѓаат на различни страни од канал со паралелни брегови. Одредете каде треба да се изгради мост на каналот (нормално поставен на бреговите), така што патот меѓу A и B да биде најкус.*



Црт. 6

Решение. Да претпоставиме дека искршената линија ACC_1B (црт. 6) го претставува најкусиот пат ($CC_1 \perp l$, $\overline{AA_1} = h$, $\overline{AA_1} \perp l$, $l \parallel k$, A_1B е отсечка). Бидејќи $h = \overline{CC_1}$, ширината на каналот е константна, добиваме дека должината на искршената линија ACC_1B ќе биде најмала кога збирот $\overline{AC} + \overline{C_1B}$ е најмал. Четириаголникот ACC_1A_1 е паралелограм, па затоа $\overline{AC} = \overline{A_1C_1}$ и добиваме $\overline{AC} + \overline{C_1B} = \overline{A_1C_1} + \overline{C_1B} = \overline{A_1B}$.

При секоја друга положба на точката C_1, да кажеме C_1', добиваме

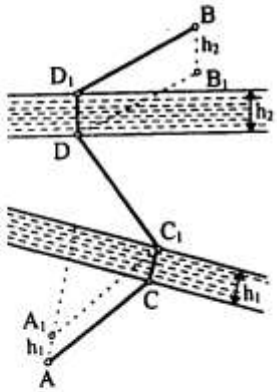
$$\overline{AC'} + \overline{C_1'B} = \overline{A_1C_1'} + \overline{C_1'B} > \overline{A_1B} = \overline{AC} + \overline{C_1B},$$

т.е. патот меѓу A и B ќе биде подолг.

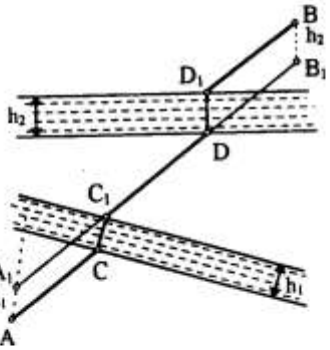
Од досега изнесеното ја имаме следната конструкција: од точката A повлекуваме отсечка $\overline{AA_1} = h$ (ширината на каналот) и нормална на правата l. Точката A_1 ја поврзуваме со Б и во пресекот на A_1B со k добиваме точка C_1. Во C_1 повлекуваме нормала на k и во пресекот со l ја добиваме точката C. Бараниот пат е ACC_1B. Конечно, мостот треба да се изгради во точката C, нормално на бреговите на каналот.

Задача 5. *Местата A и B се разделени со два канали чии широчини се h_1 и h_2. Бреговите на секој од каналите се паралелни. Каде треба да се изградат мостови преку овие канали, за патот од A до B да биде најкус?*

Мостовите се поставени нормално на бреговите на каналите?



Црт. 7



Црт. 8

Решение. Нека патот од A до B води преку мостовите CC_1 и DD_1 (црт. 7). Должината на тој пат е

$$\overline{AC} + \overline{CC_1} + \overline{C_1D} + \overline{DD_1} + \overline{D_1B}.$$

Мостовите се нормални на бреговите на каналите и должината на секој од нив е константна, каде и да се изградени. Тоа значи дека должината на патот од А до Б не зависи од $\overline{CC_1}+\overline{DD_1}$, туку само од $\overline{AC}+\overline{C_1D}+\overline{D_1B}$. Да го дополниме цртежот 7 така што конструираме паралелограми AA_1C_1C и BD_1DB_1, т.е. отсечките AC и BD_1 да ги придвижиме паралелно $\overline{AC}=\overline{A_1C_1}$ и $\overline{D_1B}=\overline{DB_1}$ (јасно $\overline{CC_1}=\overline{AA_1}=h_1$, $\overline{BB_1}=\overline{DD_1}=h_2$). Добиваме:

$$\overline{AC}+\overline{C_1D}+\overline{D_1B}=\overline{A_1C_1}+\overline{C_1D}+\overline{B_1D}.$$

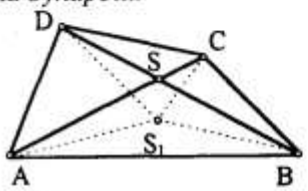
Значи, разгледуваниот збир ќе биде најмал, т.е. должината на искршената линија $A_1C_1DB_1$ ќе биде најмала, кога точките C_1 и D, во кои се наоѓаат краевите на мостовите, се наоѓаат на отсечката A_1B_1.

Од досега изнесеното ја имаме следната конструкција (црт. 8).

Конструираме отсечки AA_1 и BB_1 така што тие да се нормални на каналот кој им е поблиску и должините се еднаквина ширината на соодветниот канал, т.е. $\overline{AA_1}=h_1$, $\overline{BB_1}=h_2$. Ги поврзуваме точките A_1 и B_1. Нека се C_1 и D точките во кои A_1B_1 ги сече спротивните брегови, во однос на A и B, на каналите. Во точките C_1 и D нормално на бреговите ги конструираме мостовите CC_1 и DD_1. На крајот ги поврзуваме A со C и B со D_1.

Така, со оглед на претходно дадените објаснувања, патот ACC_1DD_1B навистина ќе биде најкус.

Задача 6. *Меѓу четири згради, кои се распоредени како темиња на конвексен четириаголник, треба да се ископа бунар така што збирот на растојанијата од бунарот до зградите биде најмал. Одредете го местото на бунарот.*



Црт. 9

Решение. Нека зградите ги означиме со A, B, C и D. Ако S_1 е произволна точка во конвексниот четириаголник $ABCD$, тогаш $\overline{AS_1}+\overline{S_1C}\geq\overline{AC}$ и $\overline{BS_1}+\overline{S_1D}\geq\overline{BD}$, при што знак на равенство се постигнува: во првиот случај ако $S_1\in AC$, а во вториот случај ако $S_1\in BD$. Според тоа, збирот $\overline{AS}+\overline{BS}+\overline{CS}+\overline{DS}$ е најмал ако $S=AC\cap BD$ и тогаш

$$\overline{AS}+\overline{BS}+\overline{CS}+\overline{DS}=\overline{AC}+\overline{BD}.$$

На крајот од овој напис еве неколку нерешени задачи кои, се надевам, ќе ви помогнат да ги продлабочите вашите знаења.

Задача 6. *Од точка M на хипотенузата на правоаголен триаголник ABC конструирани се нормали MP и MQ на катетите на триаголникот. Во кој случај должината на отсечката PQ која ги поврзува подножјата P и Q на двете нормали ќе биде најмала?*

Задача 7. *Дадена е точка M на една од страните на остроаголен триаголник ABC. Конструирајте најкус пат кој мора да го помине подвижна точка O за да, тргнувајќи од точката M ги допре и останатите две страни на триаголникот и се врати во точката M.*

Задача 8. *Пливач се наоѓа на местото A на брег на река со дадена широчина и паралелни брегови. Кој е најкусиот пат по кој тој треба да плива за да дојде до другиот брег и да се врати во точката B на првиот брег? (Се претпоставува дека брзината на течењето на водата е толку мала, така што можеме да ја занемариме.)*