



**Solutions of JBMO 2012**  
**Wednesday, June 27, 2012**

**Problem 1**

Let  $a, b$  and  $c$  be positive real numbers such that  $a + b + c = 1$ . Prove that

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} + \frac{b}{c} + \frac{c}{b} + \frac{c}{a} + \frac{a}{c} + 6 \geq 2\sqrt{2} \left( \sqrt{\frac{1-a}{a}} + \sqrt{\frac{1-b}{b}} + \sqrt{\frac{1-c}{c}} \right)$$

When does equality hold?

**Solution**

Replacing  $1-a, 1-b, 1-c$  with  $b+c, c+a, a+b$  respectively on the right hand side, the given inequality becomes

$$\frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} + \frac{a+b}{c} + 6 \geq 2\sqrt{2} \left( \sqrt{\frac{b+c}{a}} + \sqrt{\frac{c+a}{b}} + \sqrt{\frac{a+b}{c}} \right)$$

and equivalently

$$\left( \frac{b+c}{a} - 2\sqrt{2}\sqrt{\frac{b+c}{a}} + 2 \right) + \left( \frac{c+a}{b} - 2\sqrt{2}\sqrt{\frac{c+a}{b}} + 2 \right) + \left( \frac{a+b}{c} - 2\sqrt{2}\sqrt{\frac{a+b}{c}} + 2 \right) \geq 0$$

which can be written as

$$\left( \sqrt{\frac{b+c}{a}} - \sqrt{2} \right)^2 + \left( \sqrt{\frac{c+a}{b}} - \sqrt{2} \right)^2 + \left( \sqrt{\frac{a+b}{c}} - \sqrt{2} \right)^2 \geq 0,$$

which is true.

The equality holds if and only if

$$\frac{b+c}{a} = \frac{c+a}{b} = \frac{a+b}{c},$$

which together with the given condition  $a + b + c = 1$  gives  $a = b = c = \frac{1}{3}$ .

### Problem 2

Let the circles  $k_1$  and  $k_2$  intersect at two distinct points  $A$  and  $B$ , and let  $t$  be a common tangent of  $k_1$  and  $k_2$ , that touches  $k_1$  and  $k_2$  at  $M$  and  $N$ , respectively. If  $t \perp AM$  and  $MN = 2AM$ , evaluate  $\angle NMB$ .

### Solution 1

Let  $P$  be the symmetric of  $A$  with respect to  $M$  (Figure 1). Then  $AM = MP$  and  $t \perp AP$ , hence the triangle  $APN$  is isosceles with  $AP$  as its base, so  $\angle NAP = \angle NPA$ . We have  $\angle BAP = \angle BAM = \angle BMN$  and  $\angle BAN = \angle BNM$ .

Thus we have

$$180^\circ - \angle NBM = \angle BNM + \angle BMN = \angle BAN + \angle BAP = \angle NAP = \angle NPA$$

so the quadrangle  $MBNP$  is cyclic (since the points  $B$  and  $P$  lie on different sides of  $MN$ ). Hence  $\angle APB = \angle MPB = \angle MNB$  and the triangles  $APB$  and  $MNB$  are congruent ( $MN = 2AM = AM + MP = AP$ ). From that we get  $AB = MB$ , i.e. the triangle  $AMB$  is isosceles, and since  $t$  is tangent to  $k_1$  and perpendicular to  $AM$ , the centre of  $k_1$  is on  $AM$ , hence  $AMB$  is a right-angled triangle. From the last two statements we infer  $\angle AMB = 45^\circ$ , and so  $\angle NMB = 90^\circ - \angle AMB = 45^\circ$ .

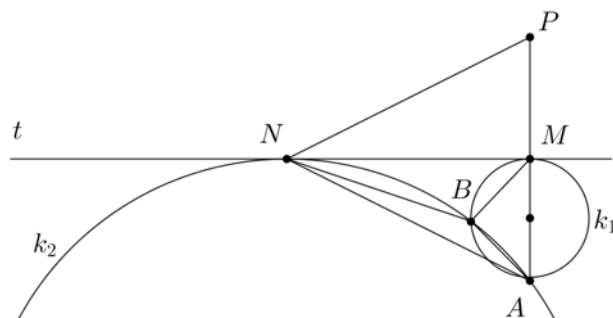


Figure 1

### Solution 2

Let  $C$  be the common point of  $MN$ ,  $AB$  (Figure 2). Then  $CN^2 = CB \cdot CA$  and  $CM^2 = CB \cdot CA$ . So  $CM = CN$ . But  $MN = 2AM$ , so  $CM = CN = AM$ , thus the right triangle  $ACM$  is isosceles, hence  $\angle NMB = \angle CMB = \angle BCM = 45^\circ$ .

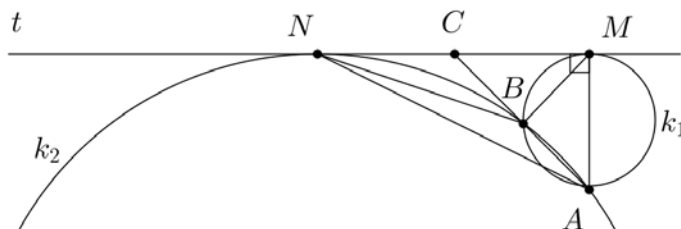


Figure 2

### Problem 3

On a board there are  $n$  nails each two connected by a string. Each string is colored in one of  $n$  given distinct colors. For each three distinct colors, there exist three nails connected with strings in these three colors. Can  $n$  be

- a) 6?                      b) 7?

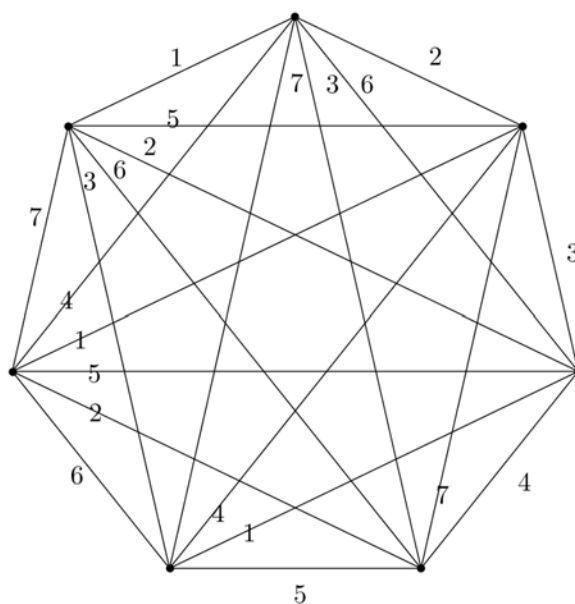
**Solution. (a)** The answer is no.

Suppose it is possible. Consider some color, say blue. Each blue string is the side of 4 triangles formed with vertices on the given points. As there exist  $\binom{5}{2} = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10$  pairs

of colors other than blue, and for any such pair of colors together with the blue color there exists a triangle with strings in these colors, we conclude that there exist at least 3 blue strings (otherwise the number of triangles with a blue string as a side would be at most  $2 \cdot 4 = 8$ , a contradiction). The same is true for any color, so altogether there exist at least  $6 \cdot 3 = 18$  strings, while we have just  $\binom{6}{2} = \frac{6 \cdot 5}{2} = 15$  of them.

**(b)** The answer is yes

Put the nails at the vertices of a regular 7-gon and color each one of its sides in a different color. Now color each diagonal in the color of the unique side parallel to it. It can be checked directly that each triple of colors appears in some triangle (because of symmetry, it is enough to check only the triples containing the first color).



**Remark.** The argument in (a) can be applied to any even  $n$ . The argument in (b) can be applied to any odd  $n = 2k + 1$  as follows: first number the nails as  $0, 1, 2, \dots, 2k$  and similarly number the colors as  $0, 1, 2, \dots, 2k$ . Then connect nail  $x$  with nail  $y$  by a string of color  $x + y \pmod{n}$ . For each triple of colors  $(p, q, r)$  there are vertices  $x, y, z$  connected by these three colors. Indeed, we need to solve  $\pmod{n}$  the system

$$(*) \quad \begin{cases} x + y \equiv p \\ x + z \equiv q \\ y + z \equiv r \end{cases}$$

Adding all three, we get  $2(x + y + z) \equiv p + q + r$  and multiplying by  $k + 1$  we get  $x + y + z \equiv (k + 1)(p + q + r)$ . We can now find  $x, y, z$  from the identities  $(*)$ .

**Problem 4**

Find all positive integers  $x, y, z$  and  $t$  such that

$$2^x \cdot 3^y + 5^z = 7^t.$$

**Solution**

Reducing modulo 3 we get  $5^z \equiv 1$ , therefore  $z$  is even,  $z = 2c, c \in \mathbb{N}$ .

Next we prove that  $t$  is even:

Obviously,  $t \geq 2$ . Let us suppose that  $t$  is odd, say  $t = 2d + 1, d \in \mathbb{N}$ . The equation becomes  $2^x \cdot 3^y + 25^c = 7 \cdot 49^d$ . If  $x \geq 2$ , reducing modulo 4 we get  $1 \equiv 3$ , a contradiction. And if  $x = 1$ , we have  $2 \cdot 3^y + 25^c = 7 \cdot 49^d$  and reducing modulo 24 we obtain

$$2 \cdot 3^y + 1 \equiv 7 \Rightarrow 24 \mid 2(3^y - 3), \text{ i.e. } 4 \mid 3^{y-1} - 1$$

which means that  $y - 1$  is even. Then  $y = 2b + 1, b \in \mathbb{N}$ . We obtain  $6 \cdot 9^b + 25^c = 7 \cdot 49^d$ , and reducing modulo 5 we get  $(-1)^b \equiv 2 \cdot (-1)^d$ , which is false for all  $b, d \in \mathbb{N}$ . Hence  $t$  is even,  $t = 2d, d \in \mathbb{N}$ , as claimed.

Now the equation can be written as

$$2^x \cdot 3^y + 25^d = 49^d \Leftrightarrow 2^x \cdot 3^y = (7^d - 5^c)(7^d + 5^c).$$

As  $\gcd(7^d - 5^c, 7^d + 5^c) = 2$  and  $7^d + 5^c > 2$ , there exist exactly three possibilities:

$$(1) \begin{cases} 7^d - 5^d = 2^{x-1} \\ 7^d + 5^d = 2 \cdot 3^y \end{cases}; \quad (2) \begin{cases} 7^d - 5^d = 2 \cdot 3^y \\ 7^d + 5^d = 2^{x-1} \end{cases}; \quad (3) \begin{cases} 7^d - 5^d = 2 \\ 7^d + 5^d = 2^{x-1} \cdot 3^y \end{cases}$$

**Case (1)**

We have  $7^d = 2^{x-2} + 3^y$  and reducing modulo 3, we get  $2^{x-2} \equiv 1 \pmod{3}$ , hence  $x - 2$  is even, i.e.  $x = 2a + 2, a \in \mathbb{N}$ , where  $a > 0$ , since  $a = 0$  would mean  $3^y + 1 = 7^d$ , which is impossible (even = odd).

We obtain

$$7^d - 5^d = 2 \cdot 4^a \xRightarrow{\text{mod } 4} 7^d \equiv 1 \pmod{4} \Rightarrow d = 2e, e \in \mathbb{N}.$$

Then we have

$$49^e - 5^d = 2 \cdot 4^a \xRightarrow{\text{mod } 8} 5^c \equiv 1 \pmod{8} \Rightarrow c = 2f, f \in \mathbb{N}.$$

We obtain  $49^e - 25^f = 2 \cdot 4^a \xRightarrow{\text{mod } 3} 0 \equiv 2 \pmod{3}$ , false. In conclusion, in this case there are no solutions to the equation.

**Case (2)**

From  $2^{x-1} = 7^d + 5^c \geq 12$  we obtain  $x \geq 5$ . Then  $7^d + 5^c \equiv 0 \pmod{4}$ , i.e.  $3^d + 1 \equiv 0 \pmod{4}$ , hence  $d$  is odd. As  $7^d = 5^c + 2 \cdot 3^y \geq 11$ , we get  $d \geq 2$ , hence  $d = 2e + 1, e \in \mathbb{N}$ .

As in the previous case, from  $7^d = 2^{x-2} + 3^y$  reducing modulo 3 we obtain  $x = 2a + 2$  with  $a \geq 2$  (because  $x \geq 5$ ). We get  $7^d = 4^a + 3^y$  i.e.  $7 \cdot 49^e = 4^a + 3^y$ , hence, reducing modulo 8 we obtain  $7 \equiv 3^y$  which is false, because  $3^y$  is congruent either to 1 (if  $y$  is even) or to 3 (if  $y$  is odd). In conclusion, in this case there are no solutions to the equation.

**Case (3)**

From  $7^d = 5^c + 2$  it follows that the last digit of  $7^d$  is 7, hence  $d = 4k + 1, k \in \mathbb{N}$ .

If  $c \geq 2$ , from  $7^{4k+1} = 5^c + 2$  reducing modulo 25 we obtain  $7 \equiv 2 \pmod{25}$  which is false. For  $c = 1$  we get  $d = 1$  and the solution  $x = 3, y = 1, z = t = 2$ .

**16-ТА ЈУНИОРСКА БАЛКАНСКА МАТЕМАТИЧКА  
ОЛИМПИАДА**



1. Нека  $a, b$  и  $c$  се позитивни реални броеви такви што  $a + b + c = 1$ . Докажи дека

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} + \frac{b}{c} + \frac{c}{b} + \frac{c}{a} + \frac{a}{c} + 6 \geq 2\sqrt{2}(\sqrt{\frac{1-a}{a}} + \sqrt{\frac{1-b}{b}} + \sqrt{\frac{1-c}{c}}) \quad (1)$$

Кога важи знак за равенство?

**Решение.** Во неравенството (1) за  $1-a, 1-b, 1-c$  заменуваме  $b+c, c+a, a+b$  и го добиваме еквивалентното неравенство

$$\frac{a+c}{b} + \frac{b+c}{a} + \frac{a+b}{c} + 6 \geq 2\sqrt{2}(\sqrt{\frac{b+c}{a}} + \sqrt{\frac{c+a}{b}} + \sqrt{\frac{a+b}{c}}),$$

кое е еквивалентно со неравенството

$$(\frac{a+c}{b} - 2\sqrt{2}\sqrt{\frac{c+a}{b}} + 2) + (\frac{b+c}{a} - 2\sqrt{2}\sqrt{\frac{b+c}{a}} + 2) + (\frac{a+b}{c} - 2\sqrt{2}\sqrt{\frac{a+b}{c}} + 2) \geq 0,$$

т.е. со неравенството

$$(\sqrt{\frac{c+a}{b}} - \sqrt{2})^2 + (\sqrt{\frac{b+c}{a}} - \sqrt{2})^2 + (\sqrt{\frac{a+b}{c}} - \sqrt{2})^2 \geq 0,$$

кое е точно.

Јасно, знак за равенство важи ако и само ако

$$\frac{c+a}{b} = \frac{b+c}{a} = \frac{a+b}{c} = 2,$$

и ако го искористиме условот  $a + b + c = 1$  добиваме дека знак за равенство важи ако и само ако  $a = b = c = \frac{1}{3}$ .

2. Нека кружниците  $k_1$  и  $k_2$  се сечат во две различни точки  $A$  и  $B$  и нека  $t$  е заедничка тангента на  $k_1$  и  $k_2$ , која  $k_1$  и  $k_2$  ги допира во точките  $M$  и  $N$ , соодветно. Ако  $t \perp AM$  и  $\overline{MN} = 2\overline{AM}$ , најди го  $\angle NMB$ .

**Решение. Прв начин.** Нека точката  $P$  е симетрична на точката  $A$  во однос на  $M$ . Тогаш  $\overline{AM} = \overline{MP}$  и  $t \perp AP$ . Затоа  $\triangle APN$  е рамнокрак и  $AP$  е негова основа. Според тоа,  $\angle NAP = \angle NPA$ . Понатаму,

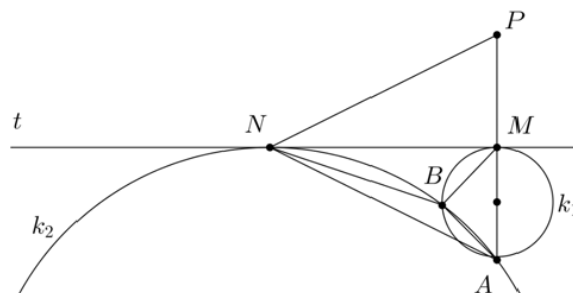
$$\angle BAP = \angle BAM = \angle BMN \text{ и } \angle BAN = \angle BNM.$$

Од досега изнесеното следува

$$180^\circ - \angle NBM = \angle BNM + \angle BMN = \angle BAN + \angle BAP = \angle NAP = \angle NPA,$$

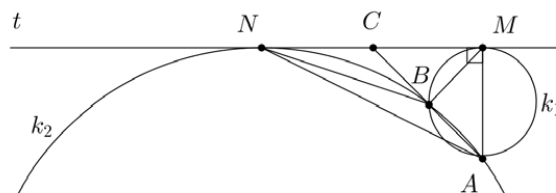
што значи дека четириаголникот  $MBNP$  е тетивен (точките  $B$  и  $P$  лежат на различни страни од  $MN$ ). Затоа  $\angle APB = \angle MPB = \angle MNB$  и триаголниците  $APB$  и  $MNB$  се складни ( $\overline{MN} = 2\overline{AM} = \overline{AM} + \overline{MP} = \overline{AP}$ ). Според тоа,  $\overline{AB} = \overline{MB}$ , т.е. триаголникот  $AMB$  е рамнокрак. Но,  $t$  е тангентата на  $k_1$ , па затоа е нормална на  $AM$ , што значи дека центарот на  $k_1$  лежи на  $AM$ , т.е. триаголникот  $AMB$  е правоаголен. Според тоа,  $\angle AMB = 45^\circ$ , од што следува дека

$$\angle NMB = 90^\circ - \angle AMB = 45^\circ.$$



**Втор начин.** Нека  $C$  е пресекот на  $MN$  и  $AB$  (види цртеж). Тогаш  $\overline{CN}^2 = \overline{CB} \cdot \overline{CA}$  и  $\overline{CM}^2 = \overline{CB} \cdot \overline{CA}$ , па затоа  $\overline{CN} = \overline{CM}$ . Но,  $\overline{MN} = 2\overline{AM}$ , па затоа  $\overline{CN} = \overline{CM} = \overline{AM}$ , што значи дека триаголникот  $ACM$  е рамнокрак. Затоа

$$\angle NMB = \angle CMB = \angle BCM = 45^\circ.$$



3. На табла има  $n$  шајки секоја поврзана помеѓу себе со конец. Секој конец е обоен со една од  $n$  дадени различни бои. За секои три различни бои, постојат три шајки поврзани меѓу себе со конци во овие три различни бои. Може ли  $n$  да биде

а) 6?

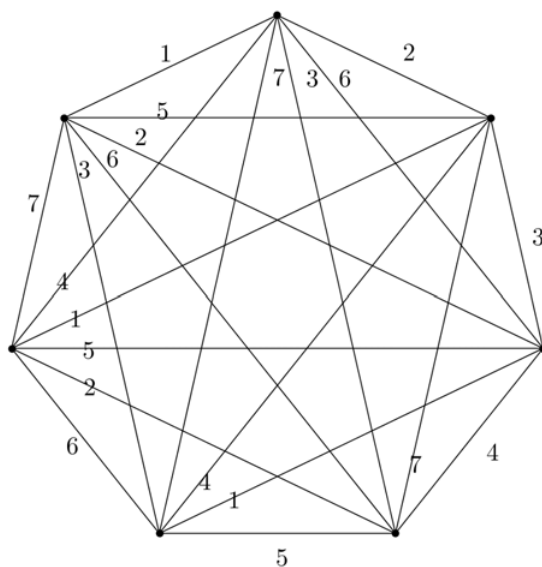
б) 7?

**Решение.** а) Одговорот е не.

Да претпоставиме дека тоа е можно. Да земеме една боја, да речеме плава. Секој плав конец е страна на 4 триаголници формирани во темиња за дадена точка. Бидејќи постојат  $\binom{5}{2} = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10$  парови на бои, во кои немаме плава, и за секој пар на бои заедно со плавата боја постои триаголник со конци во овие бои, можеме да заклучиме дека постојат најмалку три плави конци (во спротивно бројот на триаголници со плави конци како една страна ќе биде најмалку  $2 \cdot 4 = 8$ , што е противречност). Истото е точно за секоја друга боја, па сите заедно имаат  $6 \cdot 3 = 18$  конци, но ние имаме само  $\binom{6}{2} = \frac{6 \cdot 5}{2} = 15$  конци.

б) Одговорот е да.

Да ги распоредиме шајките така да секоја од нив е теме на седумаголник и да ја обоиме секоја негова страна со различна боја. Сега да ја обоиме секоја секоја дијагонала на овој седумаголник со боја која е иста со неговата страна која е паралелна на дијагоналата. Може директно да се провери дека тројка од бои се појавува кај секој триаголник (заради симетријата, доволно е да се провери само тројката која ја содржи првата боја).



**Забелешка.** Аргументот во а) може да се примени на секој парен број  $n$ . Аргументот во б) може да се примени за секој непарен број  $n = 2k + 1$  како што следи: прво означете ги шајките со  $0, 1, 2, \dots, 2k$  и исто така означете ги боите со  $0, 1, 2, \dots, 2k$ . Потоа поврзете ја шајката  $x$  со шајката  $y$  со конец со боја  $x + y \pmod{n}$ . За секоја тројка од бои  $(p, q, r)$  постојат темиња  $x, y, z$  кои се поврзани со овие три бои. Навистина, ние мораме да го решиме  $(\text{mod } n)$  системот

$$x + y \equiv p, x + z \equiv q, y + z \equiv r \quad (*)$$

Ако ги собереме сите три ќе добиеме  $2(x + y + z) \equiv p + q + r$  и доколку ги помножиме со  $k + 1$  ќе добиеме  $x + y + z \equiv (k + 1)(p + q + r)$ . Сега можеме да ги најдеме  $x, y, z$  од (\*).

4. Најди ги сите природни броеви  $x, y, z$  и  $t$  такви што

$$2^x 3^y + 5^z = 7^t. \quad (1)$$

**Решение.** Од дадената равенка разгледувајќи по модул 3 добиваме  $5^z \equiv 1 \pmod{3}$ , што значи дека  $z = 2c, c \in \mathbf{N}$ . Понатаму, јасно е дека  $t \geq 2$ . Ако  $t = 2d + 1, d \in \mathbf{N}$ , тогаш равенката (1) го добива обликот

$$2^x 3^y + 25^c = 7 \cdot 49^d.$$

Ако  $x \geq 2$ , тогаш разгледувајќи по модул 4 добиваме  $1 \equiv 3 \pmod{4}$ , што е противречност. Ако  $x = 1$ , добиваме

$$2 \cdot 3^y + 25^c = 7 \cdot 49^d$$

и разгледувајќи по модул 24 добиваме

$$2 \cdot 3^y + 1 \equiv 7 \pmod{24},$$

од што следува дека  $24 \mid 6(3^{y-1} - 1)$ , т.е.  $4 \mid (3^{y-1} - 1)$ , што значи дека  $y - 1$  е парен број. Тогаш  $y = 2b + 1, b \in \mathbf{N}$  и добиваме дека

$$6 \cdot 9^b + 25^c = 7 \cdot 49^d.$$

Ако во последното равенство разгледуваме по модул 5 добиваме  $(-1)^b \equiv 2(-1)^d \pmod{5}$ , што не е можно за кои било  $b, d \in \mathbf{N}$ . Од досега изнесеното следува дека  $t$  е парен број, т.е.  $t = 2d, d \in \mathbf{N}$ .

Според тоа, равенката (1) можеме да ја запишеме во обликот

$$2^x 3^y + 25^c = 49^d,$$

односно

$$(7^d - 5^c)(7^d + 5^c) = 2^x 3^y.$$

Но,  $\text{НЗД}(7^d - 5^c, 7^d + 5^c) = 2$  и  $7^d + 5^c > 2$  можни се следниве три случаи:

$$\begin{cases} 7^d - 5^c = 2^{x-1} \\ 7^d + 5^c = 2 \cdot 3^y \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} 7^d - 5^c = 2 \cdot 3^y \\ 7^d + 5^c = 2^{x-1} \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} 7^d - 5^c = 2 \\ 7^d + 5^c = 2^{x-1} 3^y \end{cases} \quad (4)$$

Од системот (2) добиваме

$$7^d = 2^{x-2} + 3^y$$

и ако разгледаме по модул 3, добиваме  $2^{x-2} \equiv 1 \pmod{3}$ , од што следува дека  $x - 2$  е парен број, т.е.  $x = 2a + 2, a \in \mathbf{N}_0$ , каде  $a > 0$ , бидејќи за  $a = 0$  од претходната равенка следува  $7^d = 1 + 3^y$ , што не е можно (непарен број еднаков на парен број). Според тоа,

$7^d - 5^c = 2 \cdot 4^a$  и ако разгледаме по модул 4 добиваме  $7^d \equiv 1 \pmod{4}$ , па затоа  $d = 2e, e \in \mathbf{N}$ . Тоа значи дека

$$49^e - 5^c = 2 \cdot 4^a,$$

па ако разгледаме по модул 8 добиваме  $5^c \equiv 1 \pmod{8}$ , од што следува дека  $c = 2f, f \in \mathbf{N}$ . Според тоа,  $49^e - 25^f = 2 \cdot 4^a$  и ако разгледаме по модул 3 добиваме  $0 \equiv 2 \pmod{3}$ , што е противречност. Конечно, од досега изнесеното следува дека системот (2) нема решенија во множеството природни броеви.

Да го разгледаме системот (3). Од  $2^{x-1} = 7^d + 5^c \geq 12$  следува  $x \geq 5$ . Тогаш

$$7^d + 5^c \equiv 0 \pmod{4}, \text{ т.е. } 3^d + 1 \equiv 0 \pmod{4},$$

па затоа  $d$  е непарен број. Но,  $7^d = 5^c + 2 \cdot 3^y \geq 11$ , па затоа  $d \geq 2$  и затоа  $d = 2e + 1, e \in \mathbf{N}$ . Како и во претходниот случај од  $7^d = 2^{x-2} + 3^y$  разгледувајќи по модул 8 добиваме  $x = 2a + 2$  и како  $x \geq 5$  добиваме  $a \geq 2$ . Според тоа,  $7^d = 4^a + 3^y$ , т.е.  $7 \cdot 49^e = 4^a + 3^y$  и ако разгледаме по модул 8 добиваме  $7 \equiv 3^y \pmod{8}$ , бидејќи  $3^y$  е конгруенстен со 1 по модул 8 ако  $y$  е парен, односно со 3 ако  $y$  е непарен. Конечно, од досега изнесеното следува дека системот (2) нема решенија во множеството природни броеви.

Од системот (4) следува  $7^d = 5^c + 2$ , што значи дека цифрата на единиците на бројот  $7^d$ , што е можно само ако  $d = 4k + 1, k \in \mathbf{N}$ . Ако  $c \geq 2$ , тогаш разгледувајќи го  $7^{4k+1} = 5^c + 2$  по модул 25 добиваме  $7 \equiv 2 \pmod{25}$ , што не е можно. За  $c = 1$  добиваме  $d = 1$  и решение на задачата е  $x = 3, y = 1, z = t = 2$ .