

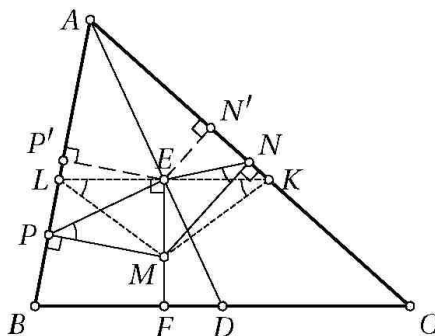
БМО 2000

1. Задачата е иста со четвртата задача од БМО 1997 година
2. Нека ABC е разностран остроаголен триаголник и E е внатрешна точка на тежишната линија AD ($D \in BC$). Нека точката F е подножјето на нормалата повлечена од точката E на правата BC , M е внатрешна точка на отсечката EF , а N и P се подножјата на нормалите повлечени од точката M на правите AC и AB , соодветно. Докажи дека правите на кои лежат симетралите на аглиите PMN и PEN немаат заеднички точки.

Решение. Нека правата низ E паралелна на правата BC ги сече страните AC и AB соодветно во точките K и L . Од Талесовата теорема следува $\overline{EK} = \overline{EL}$, па затоа $\triangle MKL$ е рамнокрак. Освен тоа четириаголниците $MENK$ и $MELP$ се тетивни, па затоа важи

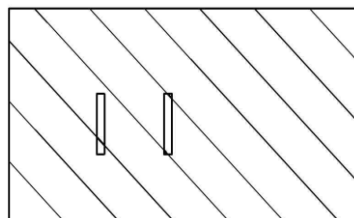
$$\angle MNE = \angle MKE = \angle MLE = \angle MPE.$$

Ако P' и N' се соодветно подножните точки на нормалите повлечени од точката E на страните AB и AC , тогаш од претходно изнесеното следува $\angle PEP' = \angle NEN'$, па затоа симетралите на аглиите $\angle PEN$ и $\angle P'EN'$ се совпаѓаат. Бидејќи симетралите на аглиите $\angle P'EN'$ и $\angle PMN$ се паралелни, останува само да забележиме дека тие не се совпаѓаат, бидејќи во спротивно двете симетрали би се совпаѓале со правата ME , што не е можно затоа што $\overline{AB} \neq \overline{AC}$.



3. Определи го најголемиот број правоаголници со димензии $1 \times 10\sqrt{2}$ кој може да се добие од правоаголник со димензии 50×90 , ако е дозволено сечење по прави паралелни на страните на дадениот правоаголник.

Решение. Нека темињата на правоаголникот се $A(0,0)$, $B(90,0)$, $C(90,50)$ и $D(0,50)$. Да ги повлечеме правите $x + y = 10n\sqrt{2}$, каде $n = 1, 2, \dots, \lfloor \frac{90+50}{10\sqrt{2}} \rfloor = 9$ и да ги разгледуваме отсечките кои правоаголникот $ABCD$ ги отсекува од нив. Лесно се пресметува дека



вкупната должина на овие отсечки е еднаква на $570\sqrt{2} - 360$. Меѓутоа, секој правоаголник со димензии $1 \times 10\sqrt{2}$ и страни паралелни на координатните

оски покрива делови од овие отсечки со должина $\sqrt{2}$. Според тоа, не може да бидат пресечени повеќе од $\left\lfloor \frac{570\sqrt{2}-360}{\sqrt{2}} \right\rfloor = 315$ од бараните правоаголници.

Ако дадениот правоаголник го поделиме на правоаголници со димензии $50 \times 60\sqrt{2}$ и $50 \times (90-60)\sqrt{2}$, тогаш првиот правоаголник може да подели на 300 правоаголници $1 \times 10\sqrt{2}$, додека од вториот може да се отсекаат уште $3 \cdot 5 = 15$ правоаголници, бидејќи $\left\lfloor \frac{50}{10\sqrt{2}} \right\rfloor = 3$ и $\left\lfloor (90-60)\sqrt{2} \right\rfloor$. Според тоа, од дадениот правоаголник може да се добијат 315 правоаголници со димензии $1 \times 10\sqrt{2}$.

4. Природниот број r го нарекуваме степен ако може да се прикаже во облик $r = t^s$, каде $t, s \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Докажи, дека за секој природен број n постои множество природни броеви A , кои ги задоволуваат условите
- 1) A има n елементи,
 - 2) сите елементи на A се степени, и
 - 3) за секои $r_i \in A, i = 1, 2, \dots, k, 2 \leq k \leq n$ бројот $\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k r_i$ е степен.

Решение. Ќе го користиме следново тврдење:

Лема. За секој $k \in \mathbb{N}$ постои $x \in \mathbb{N}$ таков што броевите $x, 2x, 3x, \dots, kx$ се степени.

Доказ. Нека се $2 = p_1 < p_2 < \dots < p_k$ првите k прости броеви. Броевите $i = 1, 2, \dots, x$ ги запишуваме во видот $i = p_1^{r_{i,1}} p_2^{r_{i,2}} \dots p_k^{r_{i,k}}$. Можеме да избереме x таков што ix е точен p_i -ти степен за $i = 1, 2, \dots, k$. Навистина, доволно е да се најде x во видот $x = p_1^{s_1} p_2^{s_2} \dots p_k^{s_k}$ таков што $s_j + r_{i,j}$ е делив со p_i за секои i, j , а такви степени $s_1, s_2, \dots, s_k$ постојат според Кинеската теорема за остатоци. ■

Множеството A ќе го побараме во облик $\{m, 2m, 3m, \dots, nm\}$. Ако ставиме

$$m = n!x, \text{ тогаш сите броеви од видот } \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k r_i, \text{ за } r_i \in A, i = 1, 2, \dots, k \text{ и } 1 \leq k \leq n$$

се цели и припаѓаат на множеството $B = \{x, 2x, \dots, n \cdot n!x\}$. Сега е доволно да определиме x таков што сите елементи на множеството B се степени, а според лемата таков x постои.