Некои карактеристични задачи од комбинаторика

Даниел Велинов, Градежен факултет, Скопје

Овде ќе бидат илустрирани неколку примери, чии техники на решавање можат да послужат за решавање на слични, но и покомплицирани проблеми од коминаторика, која е дел од Меѓународните математички олимпијади.

1. (Bay Area Math circle, 1999) Нека m и n се природни броеви. Нека е даден правоаголник кој може да се покрие со комбинација од хоризонтални $1\times m$ ленти и вертикални $n\times 1$ ленти. Докажи дека истиот истиот правоаголник може да се покрие користејќи само еден тип од овие ленти.

Решение. Да претпоставиме дека правоаголникот има димензии $a\times b$. Јасно е дека a и b се природни броеви. Потребно е да покажеме дека или a е делив со m или b е делив со n.

Нека $\xi=\cos\frac{2\pi}{m}+i\sin\frac{2\pi}{m}$ и $\eta=\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}$ се m-ти и n-ти комплексни корени на единицата соодветно. Го делиме правоаголникот на ab единечни квадрати и во квадратчето од x-тата колона и y-тата редица го запишуваме бројот $\xi^x\eta^y$. За секоја вертикална лента, збирот на броевите запишан во лентата е

$\xi^x\eta^y(1+\eta+\eta^2+\ldots+\eta^{n-1})=\xi^x\eta^y\frac{\eta^n-1}{\eta-1}=0$, каде искористивме дека η е n-ти копмлексен корен на единицата. Сосема аналогно збирот на броевите во секоја хоризонтална лента е 0. Бидејќи правоаголникот може да се покрие со овие ленти, збирот на сите броеви запишани во правоаголникот е 0. Тогаш имаме

$$(\xi+\xi^2+\ldots\xi^a)(\eta+\eta^2+\ldots\eta^b)=\xi\eta\frac{\xi^a-1}{\xi-1}\frac{\eta^b-1}{\eta-1}=0.$$

Оттука, мора $\xi^a=1$ или $\eta^b=1$ од каде добиваме дека $m\,|\,a$ или $n\,|\,b$ со што доказот е завршен.

2. (China, 1994) Најди го бројот на подмножества од $\{1,2,...,2000\}$, така да сумата на нивните елементи е делива со 5.

Решение. Да го разгледаме полиномот $f(x)=(1+x)(1+x^2)(1+x^3)\cdot\ldots\cdot(1+x^{2000})$. Тогаш постои биекција помеѓу секое подмножество $\{a_1,a_2,...,a_m\}$ од $\{1,2,...,2000\}$ и членот $x^{a_1}x^{a_2}\cdot\ldots\cdot x^{a_m}$. Па, ние ќе го бараме збирот на коефициентите пред членовите x^{5k} во $f(x)$, каде $k\in\mathbb{N}$. Нека со S ја означиме таа сума. Нека $\xi=\cos\frac{2\pi}{5}+i\sin\frac{2\pi}{5}$ е петти комплексен корен на единицата. Тогаш, $\xi^5 = 1$ и $1+\xi+\xi^2+\xi^3+\xi^4 = 0$. Следува дека $S = \frac{1}{5}\sum_{j=1}^{5} f(\xi^j)$.

Да забележиме дека $\xi, \xi^2, \xi^3, \xi^4, \xi^5 = 1$ се нули на $g(x) = x^5 - 1$, односно $g(x) = x^5 - 1 = (x-\xi)(x-\xi^2)(x-\xi^3)(x-\xi^4)(x-\xi^5)$.

Следува дека,

$g(-1) = -2 = (-1-\xi)(-1-\xi^2)(-1-\xi^3)(-1-\xi^4)(-1-\xi^5)$, од каде $(1+\xi)(1+\xi^2)(1+\xi^3)(1+\xi^4)(1+\xi^5) = 2$, па следува дека $f(\xi) = 2^{400}$. Аналогно, $f(\xi^j) = 2^{400}, j = 2,3,4$. Конечно, $f(\xi^5) = f(1) = 2^{2000}$. Па, добиваме

$$S = \frac{1}{5}(4 \cdot 2^{400} + 2^{2000}) = \frac{1}{5}(2^{402} + 2^{2000}).$$

3. Нека $A_1A_2...A_{12}$ е правилен дванаесетаголник со O како негов центар. Триаголниците OA_iA_{i+1}, $1 \le i \le 12$, каде $A_{13} = A_1$ се обоени црвено, сино, зелено или жолто така што соседните региони се обоени со различни бои. На колку начини може ова да се направи?

Решение. Ќе решиме поопшта ситуација кога имаме правилен n- аголник $A_1A_2\ldots A_n$, каде $n \ge 3$ со O како негов центар. Триаголниците OA_iA_{i+1}, $1 \le i \le n$, $(A_{n+1} = A_1)$ се обоени во некоја од k-те бои ($k \ge 3$) така што соседните региони се обоени во различни бои. Нека $p_{n,k}$ е бројот на сите такви боења. Ние сакаме да определиме $p_{12,4}$. Постојат k начини да се обои регионот OA_1A_2, а потоа на $k-1$ начини може да се обојат регионите $OA_2A_3, OA_3A_4, \ldots$. Мора да бидеме внимателни околу боењето на регионот OA_nA_1, бидејќи е можно да има иста боја како регионот OA_1A_2. Но, тогаш завршуваме со правилно боење гледајќи го регионот OA_nA_2 како регион обоен со иста боја. Па, вкупниот број на дозволени боења е

$p_{n,k} = k(k-1)^{n-1} - p_{n-1,k}$. Да забележиме дека $p_{3,k} = k(k-1)(k-2)$. Следува дека,

$$p_{n,k} = k(k-1)^{n-1} - k(k-1)^{n-2} + k(k-1)^{n-3} - \ldots - (-1)^{n-4}k(k-1)^3 + (-1)^{n-3}k(k-1)(k-2) =$$
$$= k\frac{(k-1)^n + (-1)^{n-4}(k-1)^3}{1+(k-1)} + (-1)^{n-3}k(k-1)(k-2) =$$
$$= (k-1)^n + (-1)^n(k-1)^3 + (-1)^{n-1}k(k-1)(k-2) =$$
$$= (k-1)^n + (-1)^n(k-1)\left((k-1)^2 - (k-2)k\right) = (k-1)^n + (-1)^n(k-1).$$

Оттука, сите можни начини на боење на правилниот дванаесетоаголник $A_1A_2...A_{12}$ се $p_{12,4} = 3^{12} + 3 = 531144$.

4. (USAMO 1989 предлог) Дваесет и тројца мажи со маси кои се природни броеви одлучиле да играат фудбал. Тие избираат еден за судија, а потоа се делат во два тима од единаесет мажи, така што тимовите имаат иста маса. Се покажало дека е небитно кој ќе изберат да биде судија за поделбата на тимови со иста вкупна маса. Докажи дека сите дваесет и тројца мажи имаат иста маса.

Решение. Да претпоставиме спротивно, односно дека сите 23 -та мажи немаат иста маса, а сепак ги задоволуваат условите на задачата. Тогаш помеѓу сите множества A има множество со најмала вкупна маса $\omega = a_1 + a_2 + \ldots + a_{23}$. Ако a_i е судија, тогаш $\omega - a_i = 2s_i$, каде s_i е вкупната маса на секој од тимовите. Следува $a_i \equiv \omega (\mathrm{mod}\, 2)$, односно a_i имаат иста парност. Ако сите a_i се парни тогаш A ќе го замениме со множеството $A' = \{\frac{a_1}{2}, \frac{a_2}{2}, \ldots, \frac{a_{23}}{2}\}$, со помала маса кое ги задоволува условите на задачата и бидејќи a_i не се сите со иста маса следува дека и $\frac{a_i}{2}$ не се сите со иста маса. Ова е во контрадикција со тоа дека A е множество со најмала вкупна маса.

Ако a_i се сите со непарна маса, можеме да го искористиме множеството $A'' = \{\frac{a_1+1}{2}, \frac{a_2+1}{2}, \ldots, \frac{a_{23}+1}{2}\}$ со дискусија иста како кога a_i беа парни броеви, повторно добиваме контрадикција. Значи сите играчи мора да имаат иста маса.

5. (IMO Shortlist 1998) Одреди го најмалиот број n, $n \geq 4$ за кој може да се изберат четири различни броеви a, b, c, d од n различни броеви така што $a + b - c - d$ е деливо со 20.

Решение. Најпрво ќе го разгледуваме множеството од цели броеви со различни остатоци модул 20. За такво множество од k елементи има вкупно $\binom{k}{2} = \frac{k(k-1)}{2}$ парови. Според тоа ако $\frac{k(k-1)}{2} > 20$, односно $k \geq 7$ тогаш постојат два пара (a,b) и (c,d) така што $a + b \equiv c + d\, (\mathrm{mod}\, 20)$ и a, b, c, d се различни.

Општо нека разгледаме множество од 9 различни цели броеви. Ако помеѓу нив има 7 што имаат различни остатоци при делење со 20, тогаш од горната дискусија постои решение на задачата. Нека сега имаме 6 различни остатоци при делење со 20, односно нека имаме три остатоци кои се повторуваат. Тогаш има 4 броеви (a,b,c,d) такви што $a \equiv b \equiv c \equiv d\, (\mathrm{mod}\, 20)$ или има два пара броеви (a,c) и (b,d) така што $a \equiv c$ и $b \equiv d\, (\mathrm{mod}\, 20)$. Во двата случаи можеме да ја најдеме бараната четворка.

Не е тешко да се најде множество од 8 броеви кои го немаат бараното својство $\{0, 20, 40, 1, 2, 4, 7, 12\}$. Остатоците при делење со 20 се $0, 0, 0, 1, 2, 4, 7, 12$. Овие остатоци го имаат својството дека секој ненулти остаток е помал од сумата на било кои два помали и сумата на било кои два од нив е помала од 20. Нека a, b, c, d се соодветно остатоците на 4 различни броеви на ова множество. Без губење на општоста, можеме да претпоставиме дека a е најголем (a може да се смени со b или со c и d со множење со -1, што не ја менува деливоста со 20). Значи a е ненулти остаток и $0 < a-c-d \le a+b-c-d \le a+b < 20$. Следува $a+b-c-d$ не е деливо со 20. Па, бараната минимална вредност на n е 9.

6. (AIME, 2001) Поштар носи пошта на 19 куќи од една улица. Поштарот забележал дека било кои две соседни куќи не добиваат пошта ист ден, но дека нема повеќе од две соседни куќи кои не добиваат пошта ист ден. На колку начини може да добиваат пошта куќите на таа улица?

Решение. Нека разгледаме n-цифрени броеви составени само од 0 и 1, што покажуваат дали куќата не добива или добива пошта соодветно. Таков број ќе го нарекуваме прифатлив ако не се појавуваат 11 или 000. Нека f_n е бројот на прифатливи n- цифрени броеви, a_n е бројот на прифатливи n-цифрени броеви во кои 00 следи по најлевата 1 што се повавува во бројот и нека b_n е бројот на прифатливи n-цифрени броеви во кои 01 следи по најлевата 1. Да забележиме дека $f_n = a_n + b_n$ за $n \ge 5$. Бришејќи го најлевото појавување на 100 добиваме дека $a_n = f_{n-3}$ и бришејќи го 10 од најлевото појавување на 101 добиваме дека $b_n = f_{n-2}$. Оттука, $f_n = f_{n-2} + f_{n-3}$, $n \ge 5$. Лесно се утврдува дека $f_1 = 2, f_2 = 3, f_3 = 4, f_4 = 7$. Користејќи ја рекурентната релација имаме дека $f_{19} = 351$.

7. (AIME, 2000) На 2000 картички се напишани броевите од 1 до 2000. Потоа се ставени на купче, откако претходно се измешани. Најгорната картичка е извадена од купчето и е ставена на масата. Наредната картичка е извадена од купчето и е ставена најдолу во купчето. Наредната најгорна картичка е извадена и е ставена на масата од десна страна на веќе извлечената картичка, а потоа наредната картичка е ставена на дното на купчето. Оваа постапка на вадење на најгорната картичка и ставање на масата најдесно од веќе извлечените картички, а потоа наредната најгорна картичка се става на дното на купчето продолжува се додека не се поставени сите карти на масата. Забележано е дека читајќи од лево кон десно, бројките на картичките се во растечки редослед: $1,2,3,...,2000$. Колку картички во почетното купче биле над картичката со број 1999?

Решение. Бидејќи оваа постапка придонесува броевите на картичката да се појават во растечки редослед, картичката со број 1999 е претпоследна на масата. За да го следиме трагот на таа карта, да забележиме дека, кога купче од 2^m картички се дели на овој начин, претпоследната картичка на масата почнува од позиција 2^{m-1} во купчето. Потоа процесот го применуваме на $2^{11}=2048$ картички. Откако 48 од картичките се поставени на масата и 48 картички се поместени на дното на купчето, остануваат 2000 картички. Ги тргаме картичките што се на масата. Претпоследната картичка што ќе биде поставена на масата од купчето со 2000 картички е картичката што почнала на 1024- та позиција во купчето со 2048 картички. Позицијата на картичката во купчето со 2000 картички е $1024-(48+48)=928$, па бројот на картички одозгора е 927 .

8. (AIME 1988) Во една канцеларија, во различно време на денот, шефот и дава на секретарката да обработи електронски писмо, секојпат ставајќи го писмото на врвот на купот кај секретарката. Кога има време секретарката го зема писмото што е најгоре во купот и го обработува електронски. Има 9 писма кои треба да се обработат преку целиот ден и шефот ги дава во ред $1,2,3,4,5,6,7,8,9$. Додека заминува на ручек, секретарката кажува на колегата дека писмото 8 е веќе обработено, но не кажува ништо друго за тоа што е завршено утрото. Колегата се прашува кои од 9 -те писма останале да се обработат по ручекот и по кој редослед ќе бидат обработени. Врз основа на горната информација, колку подредени обработки после ручек се можни? (Нема останато писма за обработка е една од можностите).

Решение. Во било кое време, писмата во купот се во опаѓачки редослед од горе кон дното. Низата од писмата во купот е еднозначно определена од писмата во купот. Имаме два случаи:

Прв случај.

Бидејќи писмото 9 пристигнало пред ручекот, нема писма што ќе стигнат подоцна и бројот на можни распореди е бројот на подмножества од $T=\{1,2,...,6,7,9\}$ што сеуште може да се во кутијата. Всушност секое подмножество од T е можно, бидејќи секретарката може да ги обработила како што пристигнувале. Бидејќи T има 8 елементи, има $2^8=256$ подмножества (вклучувајќи го и празното подмножество).

Втор случај.

Бидејќи писмото 9 не пристигнало пред ручекот, прашањето е каде ќе биде ставено, кој ќе биде редоследот? Било кој распоред е можен за секое подмножество од $U=\{1,2,...,6,7\}$ кое може да биде оставено во купот за време на ручекот (во опаѓачки редослед). На пример, ако писмата за време на ручекот се $6,3,2$ тогаш редоследот за обработка може да биде $6,3,9,2$ ако шефот го донесе писмото откако писмото 3 е обработено. Има $k+1$ место на кое може да се постави писмото 9 во низа од k писма. Како и да е, ако писмото 9 е ставено на почетокот од низата (на врвот од купот, пред секретарката да се врати од ручек) тогаш ние го дуплираме бројот на распореди од првиот случај. Ако k писма се останати после враќањето од ручек и секретарката започнала со обработка имаме k места каде може да се внесе писмото 9. Тогаш добиваме $\sum_{k=0}^{7} k\binom{7}{k} = 7\cdot 2^{7-1} = 448$.

Па вкупниот број на можни распореди е $256+448=704$.

Задачи за самостојна работа

1. Секое множество од конечна фамилија од подмножества од реалната права е унија од два затворени интервали. Дополнително, било кои три множества од таа фамилија имаат заедничка точка. Докажи дека која е заедничка за најмалку половина од множествата од таа фамилија.
2. Нека $a_1, a_2, a_3, \ldots$ е неопаѓачка низа од позитивни цели броеви. За $m \geq 1$, дефинираме $b_m = \min\{n : a_n \geq m\}$, односно b_m е најмалата вредност на n за која $a_n \geq m$. Ако $a_{19} = 85$, најди ја максималната вредност на сумата $a_1 + a_2 + \ldots + a_{19} + b_1 + b_2 + \ldots + b_{85}$.
3. Еден математички натпревар се состои од два дела: Дел 1 и Дел 2 кои заедно имаат 28 проблеми. Секој натпреварувач решил 7 проблеми заедно од двата дела. За секој пар на проблеми, постојат точно два натпреварувачи кои ги решиле и двата проблеми. Докажи дека постои натпреварувач кој, во Дел 1, не решил ниту еден проблем или најмалку четири проблеми.
4. Една организација има m членови и таа има $m+1$ комитети со по три члена, и никои два од нив немаат исто членство (сите три члена се заеднички). Докажи дека постојат два комитети кои имаат точно еден заеднички член.

Користена литература

1. Andreescu, T.; Feng, Z., 102 Combinatorial Problems from the Training of the USA IMO Team, Birkhäuser, 2002.
2. Andreescu, T.; Feng, Z., A Path to Combinatorics for Undergraduate Students: Counting Strategies, Birkhäuser, 2003.
3. Klamakin M.S., USA Mathematical Olympiads 1972-1986, The Mathematical Association of America, Washington, 1988.