7 и 8 ОДДЕЛЕНИЕ

Секоја од задачите со реден број од 1 до 10 се вреднува со 3 поени

1. Колку е вредноста на збирот $12+23+34+45+56+67+78+89$?

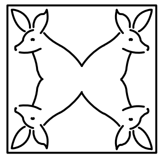
(A) 389 (B) 396 $\boxed{(C)\ 404}$ (D) 405 (E) друг одговор

Решение. Со непосредно пресметување добиваме

$$12+23+34+45+56+67+78+89=10+20+30+40+50+60+70+80+2+3+4+5+6+7+8+9=$$
$$=360+44=404$$

2. Колку оски на симетрија има фигурата на цртежот ?

(A) 0 (B) 1 $\boxed{(C)\ 2}$ (D) 4 (E) бесконечно многу



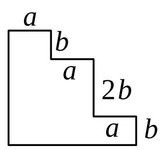
Решение. Јасно е дека оски на симетрија се двете средни линии на кваратот. Други оски на симетрија нема. Секоја оска на симетрија треба да е права така што кога кваратот ќе се превитка двата делбени дела да се преклопат. Постојат уште две такви прави (правите на кој лежат дијагоналите). Не е тешко да се провери дека тие прави не се оски на симетрија.

3. Во коцкаста кутија се спакувани осум мали коцкасти кутии, кои целосно ја исполнуваат. Во секоја од нив има играчка кенгур. Колку мали кутии со играчка кенгур се сместени на дното на големата кутија?

(A) 1 (B) 2 (C) 3 $\boxed{(D)\ 4}$ (E) 5

Решение. Бидејќи големата кутија е коцкеста и целосно исполнета, на дното не може да има ниту една ниту две ниту три мали кутии. Дното на големата кутија е квадрат. Бидејќи таа збира осум кутии, најмалиот број на кутии кои може да се на нејзиното дно е 4.

4. Периметарот на фигурата е еднаков на

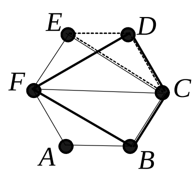


(A) $3a+4b$ (B) $3a+8b$ (C) $6a+4b$ (D) $6a+6b$ $\boxed{(E)\ 6a+8b}$

Решение. Периметарот на фигурата е еднаков на периметарот на правоаголник со страни $3a$ и $4b$. Јасно е дека периметарот во тој случај е еднаков на

$$2\cdot 3a+2\cdot 4b=6a+8b .$$

5. Дафина нацртала шест точки кои се темиња на правилен шестаголник. Некои од нив ги поврзала со отсечки и добила геометриска фигура. Добиената геометриска фигура сигурно не е



(A) трапез (B) правоаголен триаголник (C) $\boxed{\text{квадрат}}$

(D) делтоид (E) тапоаголен триаголник

Решение. Јасно е од цртежот дека $CFAB$ е трапез, FCE е правоаголен триаголник, ECD е тапоаголен триаголник, а $DFBC$ е делтоид. Исто така може да се провери дека нема четири точки кои прават квадрат.

6. Петар избрал седум последователни природни броеви. Кога ги собрал најмалите три добил збир 33. Кој број ќе го добие ако ги собере најголемите три?

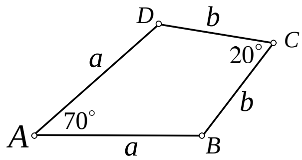
(A) 39 (B) 37 (C) 42 (D) 48 $\boxed{(E)\ 45}$

Решение. Нека избраните броеви се $n, n+1, n+2, n+3, n+4, n+6, n+6$. Од условот на задачата имаме

$$n+(n+1)+(n+2)=33$$
$$3n+3=33$$

Од каде добиваме $n=10$. Според тоа

$$(n+6)+(n+5)+(n+4)=16+15+14=45.$$



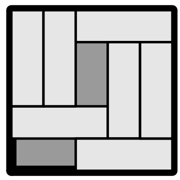
7. Колку е вредноста на аголот $\measuredangle ABC$ во четириаголникот $ABCD$ даден на цртежот?

(A) 110° (B) 120° (C) 125° $\boxed{(D)\ 135°}$ (E) 140°

Решение. Очиглено е дека четириаголникот $ABCD$ е делтоид. Јасно е дека $\measuredangle ABD = \measuredangle ABC = \alpha$. Сега,

$$2\alpha + 70° + 20° = 360°$$
$$2\alpha = 270°,$$

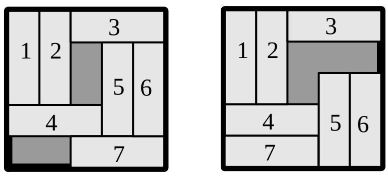
па според тоа $\measuredangle ABC = 135°$.



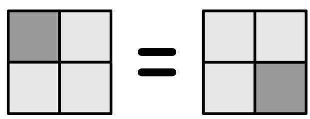
8. Квадратна рамка со димензии 5×5 е поставена на рамна површина. Во нејзината внатрешност се поставени седум плочки со димензии 3×1. Дозволено е правоаголните точки да ги поместуваме со лизгање. Кој е најмалиот број на дозволени поместувања за да се направи место за (да се стави) уште една правоаголна плочка?

(A) 2 $\boxed{(B)\ 3}$ (C) 4 (D) 5 (E) не е возможно

Решение. Плочките кои се ставени во квадратната рамка ќе ги означиме со броевите од



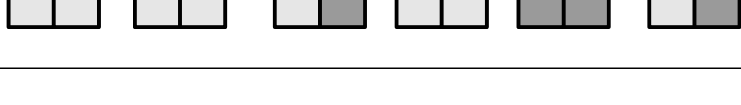
1 до 7 како на цртежот. Очигледно е дека единствена плочка која може да се придвижи е плочката со реден број 7 во лево. Потоа, јасно е дека единствени плочки кои може да се придвижат се плочките со редни броеви 5 и 6 надолу. Тогаш ќе се направи место за уште една плочка (види цртеж).



9. Еден квадрат е поделен на 4 помали еднакви меѓу себе квадратчиња. Секое од малите квадратчиња е обоено со една од боите: зелена или сина. На колку различни начини може да се обои почетниот квадрат на овој начин (две боења ги сметаме за еднакви, ако едното од нив може да се добие од другото со ротација)?

(A) 5 $\boxed{(B)\ 6}$ (C) 7 (D) 8 (E) 9

Решение. Бидејќи две боења, за кои едното може да се добие од другото со ротација ги сметаме за еднакви, не е тешко да се виде дека различни боења се следните



10. Збирот на првите сто непарни природни броеви е одземен од збирот на првите сто парни природни броеви. Добиената разлика е:

(A) 0 (B) 50 $\boxed{(C)\ 100}$ (D) 10100 (E) 15150

Решение. Разликата од збирот на првите сто парни природни броеви и збирот на првите сто непарни броеви може да се запише во облик

$$(2+4+6+8+...+200)-(1+3+5+7+9+...+199)=$$
$$=\underbrace{(2-1)+(4-3)+...+(200-199)}_{100-\text{собироци}}=\underbrace{1+1+1+...+1}_{100-\text{собироци}}=100$$

<u>**Секоја од задачите со реден број од 11 до 20 се вреднува со 4 поени**</u>

11. Бабата испекла колач за своите внуци, кои треба да ја посетат по попладнето, но заборавила дали ќе дојдат 3, 5 или сите 6 внуци.

На колку парчиња треба д аго раздели колачот, меѓусебно еднакви, за да може кога ќе му го подели внуците да добијат иста количина од него.

(A) 12 парчиња (B) 15 парчиња (C) 18 парчиња
(D) 24 парчиња $\boxed{(E)\ 30 \text{ парчиња}}$

Решение. Бидејќи $\text{НЗС}(3,5,6)=30$, бабата доволно е да го раздели на 30 еднакви парчиња. Во тој случај

$10+10+10$

$6+6+6+6+6$

$5+5+5+5+5+5$,

односно може да се разели на еднакви делови без разлика дали ќе дојадат $3,5$ или 6 внуци.

12. Кој од следните броеви е најмалиот двоцифрен број кој не може да се запише како збир на три различни едноцифрени броеви?

(A) 10 (B) 15 (C) 23 $\boxed{(D)\ 25}$ (E) 28

Решение. Јасно е дека

$28>27=9+9+9>9+8+7=24$

не може да се запише како збир на три едноцифрени природни броеви.

Од друга страна,

$10=2+3+5$

$15=6+7+2$

$23=9+8+6$

Збирот на најголемите три различни природни броеви е еднаков на 24. Спорде тоа, бараниот број е 25.

13. На Кате и требаат 18 минути за да направи долго ланче со меѓусебно спојување на 3 кратки ланчиња. Колку време и треба да направи долго ланче, спојувајќи 6 долги ланчиња?

(A) 27 min (B) 30 min (C) 36 min $\boxed{(D)\ 45 \text{ min}}$ (E) 60 min

Решение. За од три кратки ланчиња направи еден долг ланец, потребни се две спојувања. Според тоа, за едно спојување потребни се 9 min.

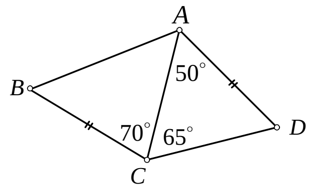
За да направи ланец спојувајќи 6 кратки ланчиња, потребно е да направи пет спојувања, а за тоа се потребни

$9\cdot 5=45$ min.

14. Во четириаголникот $ABCD$, $\overline{AD}=\overline{BC}$, $\measuredangle DAC=50^\circ$, $\measuredangle DCA=65^\circ$ и $\measuredangle ACB=70^\circ$ (види цртеж). Најди ја вредноста на $\measuredangle ABC$.

(A) 50° $\boxed{(B)\ 55^\circ}$ (C) 60°

(D) 65° (E) не е можно да се определи



Решение. Во триаголникот ADC имаме $\measuredangle CAD=50^\circ$, $\measuredangle ACD=65^\circ$, па според тоа

$$\measuredangle CDA=180^\circ-(\measuredangle CAD+\measuredangle ACD)=180^\circ-115^\circ=65^\circ.$$

Значи, ΔDAC е рамнокрак, при што основа е CD и $\overline{AC}=\overline{AD}$. Значи,

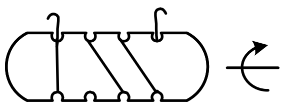
$$\overline{AD}=\overline{BC}=\overline{AC},$$

Односно триаголникот ABC е исто така рамнокрак со основа AB. Ако воведеме ознака $\measuredangle CBA=\measuredangle BAC=\alpha$, добиваме

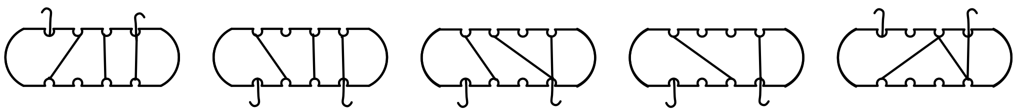
$$2\alpha+70^\circ=180^\circ,$$

$$2\alpha=110^\circ.$$

Значи, бараниот агол е $\measuredangle ABC=55^\circ$.



15. Андреа намотала јаже околу дрвена плочка како на цртежот. Таа ја свртела дрвената плочка како што е покажано со стрелката на цртежот. Што ќе види таа по свртувањето?



(A) $\boxed{(B)}$ (C) (D) (E)

Решение. Не е тешко да се виде дека точен одговор е под B.

16. Во една кутија има 50 коцкички. Секоја од нив целосно е обоена со една боја: бела или сина или црвена. Бројот на бели коцкички е 11 пати поголем од бројот на сини коцкички. Црвени коцкички има повеќе од сини но помалку од бели. Колку бели коцкички има повеќе од црвени?

(A) 2 (B) 11 $\boxed{(C)\ 19}$ (D) 22 (E) 30

Решение. Нека x е бројот на бели коцки, y бројот на плави коцки, а z е бројот на црвени коцки. Од условите на задачата имаме

$$x+y+z=50$$

$$x=11y$$

$$y<z<x.$$

Од првата равенка имаме $11y+y+z=50$, т.е.

$$z=50-12y.$$

Сега можни вредности за y се $1,2,3$ и 4.

а)за $y=1$ имаме $z=38, x=11$. Не е исполнет третиот услов.

б)за $y=2$ имаме $z=28, x=22$. Не е исполнет третиот услов.

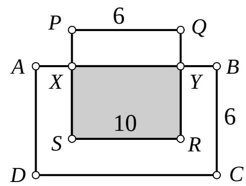
в)за $y=4$ имаме $z=2$ и не е исполнет третиот услов.

г)за $y=3$ имаме $x=33, z=14$. Тогаш

$$x-z=19.$$

17. На цртежот $ABCD$ е правоаголник, а $PQRS$ е квадрат. Плоштината на затемнетиот дел е половина од плоштината на правоаголникот $ABCD$. Колку е должината на отсечката PX ?

$\boxed{(A)\ 1}$ (B) 1,5 (C) 2 (D) 2,5 (E) 4



Решение. Ако бараната должина е x, тогаш од условите на задачата имаме

$$(6-x)6=30$$
$$36-6x=30$$
$$6x=6 .$$

Значи, должината на PX е 1.

18. Кој е најмалиот број на прави што треба да нацртаат во една рамнина, за да тие ја разделат на точно 5 различни делови?

(A) 3 $\boxed{(B)\ 4}$ (C) 5 (D) 6 (E) друг одговор

Решение. Две прави што се сечат ја делат рамнината на четири различни делови. Ако сме избрале две такви прави, тогаш со избор на било која трета права бројот на делбени делови е 6 или 7. Ако минува низ пресечната точка на правите ја дели рамнината на 6 дела, а ако не минува низ нивната пресечна точка ја дели рамнината на 7 дела.

Значи, не може да има две прави кои се сечат. Делбените прави треба да се паралелни. Значи, потребни се 4 прави што е и најмал број.

19. Ако $a-1=b+2=c-3=d+4=e-5$, тогаш кој од броевите a,b,c,d и e е најголем?

(A) a (B) b (C) c (D) d $\boxed{(E)\ e}$

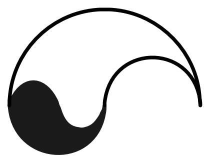
Решение. Ќе воведеме ознака

$$a-1=b+2=c-3=d+4=e-5=k .$$

Тогаш $a=k+2, b=k-2, c=k+3, d=k-4, e=k+5$,

Па сега е јасно дека најголем од броевите е e.

20. Цртежот претставува лого (амблем) на една фирма. Тој е направен од полукружници со радиуси $2\ cm$, $4\ cm$ и $8\ cm$. Колкав дел од логото е затемнет?



(A) $\frac{1}{3}$ $\boxed{(B)\ \frac{1}{4}}$ (C) $\frac{1}{5}$ (D) $\frac{3}{4}$ (E) $\frac{2}{3}$

Решение. Очигледно е дека плоштината на целиот амблем е

$$P=\frac{1}{2}8^2\pi \text{ cm}^2=32\pi \text{ cm}^2 .$$

Плоштината на затемнетиот дел е

$$Q=\frac{1}{2}4^2\pi=8\pi \text{ cm}^2$$

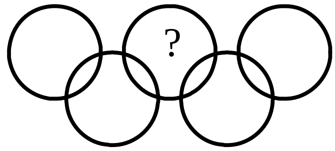
Според тоа

$$\frac{Q}{P}=\frac{8\pi}{32\pi}=\frac{1}{4},$$

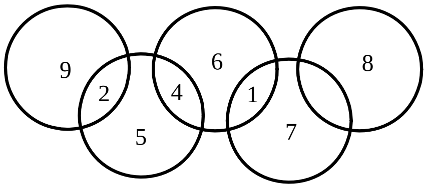
па значи плоштината на затемнетиот дел е $\frac{1}{4}$ од целиот амблем.

<u>**Секоја од задачите со реден број од 21 до 30 се вреднува со 5 поени**</u>

21. Фигурата на цртежот се состои од девет региони кои се делови од внатрешноста на нацртаните кружници. Броевите од 1 до 9 се запишани во нив, по еден во секој регион. Збирот на броевите што се во внатрешноста на секоја кружница е 11. Кој број мора да е запишан во регионот во кој се наоѓа прашалникот?



(*A*) 5 $\boxed{(B)\ 6}$ (*C*) 7 (*D*) 8 (*E*) 9



Решение. Во кругот со прашалник мора да е запишан бројот 6. Таков распоред е даден на цртежот. Со непосредна пресметка, ако ставиме било која друга бројка на местото на прашалникот и ги правиме сите можни распореди, ќе видеме дека таков распоред не може да се добие.

22. На сточниот пазар, размена на стока се врши според ценовникот даден во табелата. Колку кокошки на пазарот треба да донесе фармерот Трпе за да однесе дома смо една гуска, една мисирка и еден петел?

ЦЕНОВНИК		
1 мисирка	⇔	1 петел
1 гуска + 2 кокошки	⇔	3 петли
4 кокошки	⇔	1 петел

$\boxed{(A)\ 18}$ (*B*) 17 (*C*) 16 (*D*) 15 (*E*) 14

Решение. Не е тешко да се провери дека една гуска има вредност колку 10 кокошки, една мисирка колку 4 кокошк и еден петел колку четири кокошки. Според тоа потребно е да понесе 18 кокошки.

23. Една хартиена лента ја превиткуваме на половина три пати последователно, а потоа целосно ја одвиткуваме. При тоа гледаме дека се добиени седум прекршувања, некои се нагоре а некои надолу.

Кој од следните погледи, гледајќи ја одвитканата трака бочно не може да се добие на тој начин?

(*A*)


(*B*)


(*C*)


$\boxed{(D)}$


(*E*)


Решение. Со непосредна проверка, јасно е дека не може да се добие линијата под (*D*). Тоа може да се направи и со употреба на една хартиена трака, која на опишаниот начин ќе ја превиткаме трипати, а потоа ќе ја одвиткаме. Потоа треба да направиме споредба.

24. На точно 18 карти напишан е еден од броевите 4 или 5. Збирот на броевите на картите е делив со 17. На колку карти е запишан бројот 4?

(A) 4 $\boxed{(B)\ 5}$ (C) 6 (D) 7 (E) 9

Решение. Нека бројот на карти на кои е запишан бројот 4 е x. Тогаш од условот на задачата, имаме

$$4x+(18-x)5=17k,$$

За некој природен број k. Но тогаш $x=90-17k$. За $k=1,2,3,4,5,6,...$ добиваме

$$x=90-17=63$$
$$x=90-34=56$$
$$x=60-51=39$$
$$x=90-68=22$$
$$x=90-85=5$$
$$x=90-102=-12,$$

соодветно. Сега е јасно дека единствена можност е $k=5$ или $x=5$.

25. Природните броеви од 1 до 10 се запишани на една табла. Учениците од еден клас ја играат следната игра: еден ученик брише два од запишаните броеви и на таблата го запишува нивниот збир намален за 1; потоа друг ученик брише два броја од тие што се на таблата и го запишува нивниот збир намален за еден, итн. Играта со наредни чекори продолжува додека на таблата не остане еден број. Последниот број што останал на таблата е:

(A) помал од 11 (B) 11 $\boxed{(C)\ 46}$ (D) поголем од 46 (E) друг одговор

Решение. Збирот на сите броеви кои се запишани на таблата е

$$1+2+3+4+5+6+7+8+9+10=\frac{10\cdot 11}{2}=55.$$

При секој чекор што ќе се направи во играта, збирот на броевите се намалува за еден, при што може да се направат девет чекори. На крај, според тоа, ќе се добие бројот 46.

26. Едно кенгурче има голема колекција од единечни коцкички. Секоја коцкичка е обоена во една боја. Кенгурчето сака да употреби 27 коцкички и да направи коцка со раб 3. При тоа коцкичките кои имаат заедничко теме да се обоени со различна боја. Кој е најмалиот број на бои кој кенгурчето треба да ги употреби?

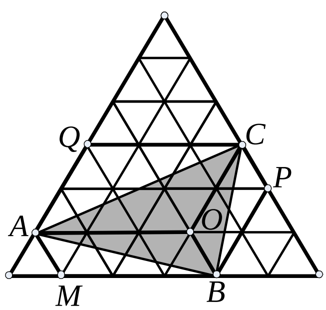
(A) 6 $\boxed{(B)\ 8}$ (C) 9 (D) 12 (E) 27

Решение. Најгорниот ред на коцки може да се направи со девет коцки во четири различни бои и да е исполнет условот од задачата. Со истите бои, на истиот начин може да се обои и најдолниот ред од коцки.

Срениот ред на коцки за да се нареди како што се бара во условот од задачата, потребни се четири бои, но при тоа не смее да се употреби ниту една боја од претходното редење на најдолжниот и најгорниот ред на коцки.

Значи, потребни се коцки во осум различни бои.

27. Рамностран триаголник е разделен на 36 рамнострани триаголници со плоштина $1\,cm^2$. Колку е плоштината на триаголникот ABC (види цртеж).



(A) 11 cm^2 (B) 12 cm^2 (C) 15 cm^2 (D) 9 cm^2 (E) 10 cm^2

Решение. Ќе избереме точки O, M, P, Q како на цртежот. Тогаш

$$P_{\Delta ABC} = P_{\Delta OAB} + P_{\Delta OBC} + P_{\Delta OCA}.$$

Од друга страна

$$P_{\Delta OAB} = \frac{1}{2} P_{OAMB} = \frac{1}{2} \cdot 6 = 3,$$

$$P_{\Delta OBC} = \frac{1}{2} P_{OBPC} = \frac{1}{2} \cdot 4 = 2,$$

$$P_{\Delta OCA} = \frac{1}{2} P_{OCQA} = \frac{1}{2} \cdot 12 = 6$$

Сега, $P_{\Delta ABC} = 6 + 3 + 2 = 11 \text{ cm}^2$.

28. Броевите од 1 до 10 се запишани еден по друг во нивниот природен распоред. Меѓу секои два од нив ставен е еден од знаците, за собирање или за множење (на пример $1 \cdot 2 \cdot 3 + 4 + 5 \cdot 6 + 7 \cdot 8 + 9 + 10$). Нека N е најголемата можна врдност која може да се добие на тој начин.

Од дадените тврдења само едно е точно. Кое е тоа?

(A) N е делив со 3

(B) N е десет цифрен број

(C) последните три цифри на N се нули

$\boxed{(D)\ N \text{ не завршува на нула}}$

(E) сите претходни одговори не се точни

Решение. Најголема можна вредност се добива доколку броевите се помножат меѓу себе. При тоа, бидејќи множењето со 1 не го менува производот доколку останатите броевите ги помножиме меѓу себе, наместо да множиме со 1 на производот на броевите

$$2,3,4,5,6,7,8,9,10$$

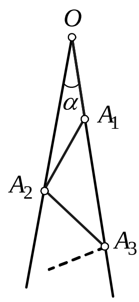
ќе ја додаеме единицата.

Значи, најголем број е

$$2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 + 1.$$

Сега, очигледно е дека точен одговор е под D, т.е. бројот N не завршува на нула.

(Вредно е да се напомене, и решението да се бара користејќи го неравенството $x \cdot y > x + y$, каде x, y се природни броеви различни меѓу себе поголеми од 1).



29. Во фигурата на цртежот $\measuredangle \alpha = 7^\circ$ и $\overline{OA_1} = \overline{A_1A_2} = \overline{A_2A_3} = \ldots$ Колку отсечки A_iA_{i+1} може да се нацртаат на тој начин?

(A) 10 (B) 11 $\boxed{(C)\ 12}$ (D) 13 (E) колку што сакаме

Решение. Триаголниците

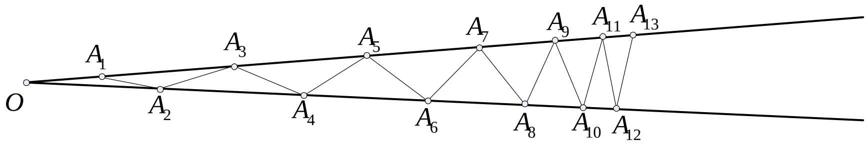
$$OA_1A_2, A_1A_2A_3, A_2A_3A_4, A_3A_4A_5, A_4A_5A_6, A_5A_6A_7, A_6A_7A_8,$$
$$A_7A_8A_9, A_8A_9A_{10}, A_9A_{10}A_{11}, A_{10}A_{11}A_{12}, A_{11}A_{12}A_{13}$$

се рамнокраки со основи

$$A_1A_2, A_1A_3, A_2A_4, A_3A_5, A_4A_6, A_5A_7, A_6A_8,$$
$$A_7A_9, A_8A_{10}, A_9A_{11}, A_{10}A_{12}, A_{11}A_{13}$$

соодветно, и имаат агли при основите од

$7^\circ, 14^\circ, 21^\circ, 28^\circ, 35^\circ, 42^\circ, 49^\circ, 56^\circ, 63^\circ, 70^\circ, 77^\circ, 84^\circ$.



Ако може да се доцрта уште една отсечка, тогаш би се добил триаголник $A_{12}A_{13}A_{14}$ и тој би имал агли при основата од 91° што не е можно.

Значи, може да се доцртаат 12 -отсечки A_iA_{i+1} .

30. Колку има трицифрени броеви, на кои средната цифра им е средина од преостанатите две цифри?

(A) 12 (B) 16 (C) 25 (D) 34 $\boxed{(E)\ 45}$

Решение. Од условот на задачата се бараат броевите од облик $\overline{abc}$, $a \neq 0$, $a,b,c \in \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,0\}$ и

$$\frac{a+c}{2} = b \text{, т.е. } a+c = 2b .$$

Значи, треба да се најдат сите решенија на равенките

$a+c=2,\quad a+c=4,\quad a+c=6,$

$a+c=8,\quad a+c=10,\quad a+c=12,$

$a+c=14,\quad a+c=16,\quad a+c=18.$

во множеството цифри, и $a \neq 0$. Не е тешко да се провери дека бројот на решенија на овие равенки се $2,4,6,8,9,7,5,3,1$ соодветно.

Според тоа, такви броеви има $1+2+3+4+5+6+7+8+9=45$.