

## ЕДНА ЗАДАЧА, ПОВЕЌЕ НАЧИНИ ЗА НЕЈЗИНО РЕШАВАЊЕ

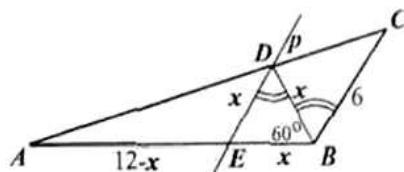
Постојат одредени математички задачи кои можат да се решат на еден единствен начин. Тие не посветуваат на планински врв, кој што може дасе "освои" само од една страна. Но, постојат и математички задачи коишто овозможуваат "освојување од повеќе страни", т.е. постојат повеќе патишта што водат до решението на задачата. Ваквите задачи овозможуваат да го искажеме сето наше богатство на идеи, досетки, проникливост, инвентивност.

Математичкото искуство на секој ученик било непотполно, ако никогаш не би му се овозможила прилика да се обиде да реши некоја задача на повеќе начини. Со решавање на една задача на повеќе начини, ученикот стекнува самодоверба, истражува и ја гради својата математичка зрелост.

Еве, и во овој број на СИГМА ви нудиме една задача што може да се реши на повеќе начини. Но, пред да ги проследиме понудените решенија, обидете се и сами да ја решите задачата на неколку начини.

**Задача.** Пресметај ја должината  $BD$  на симетралата на аголот  $\beta$  во триаголникот  $ABC$ , ако:  $a = 6 \text{ см}$ ,  $c = 12 \text{ см}$  и  $\beta = 120^\circ$ .

**Решение I.** Нека  $BD = x$  е симетрала на аголот  $\beta$  на  $\triangle ABC$ . Низ  $D$  повлекуваме права  $p \parallel BC$  и нека  $p \cap AB = \{E\}$ . Ке докажеме дека  $\triangle DBE$  е рамнотран. На-

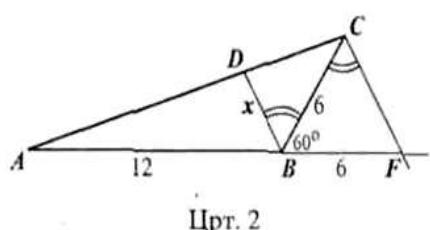


Црт. 1

$\angle ADB = \angle ACD = 60^\circ$  (наизменични)

Следствено  $\triangle DBE$  е рамнотран па следува дека  $\overline{ED} = \overline{EB} = x$ . Очигледно е дека  $\triangle AED \sim \triangle ABC$ , а оттука:  $\frac{AE}{ED} = \frac{AB}{BC}$  или  $(12-x):x = 12:6$  од каде што  $x = 4$ . Значи,  $BD = 4 \text{ см}$ .

**Решение II.** Нека  $\overline{BD} = x$  е симетрала на аголот  $\beta$  на  $\triangle ABC$  и нека  $CF \parallel BD$  (црт. 2). Лесно заклучуваме дека  $\triangle BFC$  е рамнотран, бидејќи има два агла по  $60^\circ$ , и дека  $\triangle ABD \sim \triangle AFC$ , од каде што  $\frac{AB}{BD} = \frac{AF}{FC}$



Црт. 2

$12:x = (12+6):6$  т.е.  $x = 4$ . Значи  $\overline{BD} = 4 \text{ см}$ .

**Решение III.** Нека  $S$  е средина на страната  $AB$ , тогаш  $\overline{AS} = \overline{SB} = 3 \text{ см}$ , па следува дека  $\triangle CSB$  е рамнокрак, со агли при основата  $CS$  од  $30^\circ$  (црт. 3). Бидејќи  $BD$  е симетрала на аголот  $\beta$ , следува дека  $\triangle SBO$  е правоаголен, па имаме:

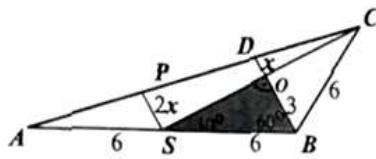
$$(1) \quad \overline{BO} = \frac{1}{2} \overline{SB} = 3$$

(катетата наспроти агол од  $30^\circ$  е еднаква на половината од хипотенузата). Низ  $S$  повлекуваме  $SP \parallel BD$ . Бидејќи  $O$  е средина на отсечката  $CS$ , следува дека  $\overline{OD} = x$  е средна линија во  $\triangle SCP$ ; тогаш  $SP = 2x$ . Од друга страна, пак,  $SP$  е средна линија во  $\triangle ABD$ , бидејќи  $S$  е средина на  $AB$ , па добиваме:

$$\overline{BD} = 2\overline{SP} = 2 \cdot 2x = 4x, \text{ а оттука:}$$

$$(2) \quad \overline{BO} = \overline{BD} - \overline{OD} = 4x - x = 3x$$

Од (1) и (2) наоѓаме дека  $x = 1$ . Следствено,  $\overline{BD} = 4 \text{ cm}$ .

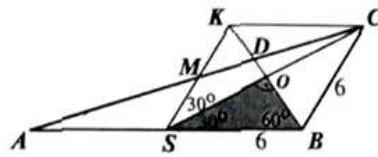


Црт. 3

**Решение IV.** Нека  $S$  е средина на страната  $AB$ , тогаш  $\triangle ACS$  е рамнокрак, со агли при основата од  $30^\circ$  (црт. 4). Нека  $K$  е симетрична точка на точката  $B$  во однос на правата  $CS$ . По таков начин го добиваме ромб  $SBCK$ , чии дијагонали се преполовуваат во пресечената точка  $O$ . Притоа, триаголниците  $SBK$  и  $BCK$  се рамнострани (бидејќи

$\angle BSK = 30^\circ + 30^\circ = 60^\circ = \angle BCK$ ), со страна од  $6 \text{ cm}$ .

Значи,  $\overline{BK} = 6 \text{ cm}$ , а  $\overline{OK} = 3 \text{ cm}$ . Бидејќи  $S$  е средина на отсечката  $AB$  и  $SK \parallel BC$ ,



Црт. 4

следува дека  $SM$  е средна линија во  $\triangle ABC$ , т.е.  $\overline{SM} = \frac{1}{2}\overline{BC} = 3 \text{ cm}$ . Но,  $\overline{SK} = 6 \text{ cm}$ , па значи  $M$  е средина на отсечката  $SK$ . Следствено, отсечката  $CM$  е тежишна линија во  $\triangle SCK$ . Исто така, и  $KO$  е тежишна линија во истиот триаголник, па според тоа, нивниот пресек, точката  $D$  е тежиште во  $\triangle SCK$ . Тогаш:

$$\overline{OD} = \frac{1}{3}\overline{OK} = 1 \text{ cm}, \quad \overline{BO} = \frac{1}{2}\overline{BK} = 3 \text{ cm}. \quad \overline{BD} = \overline{BO} + \overline{OD} = 4 \text{ cm}.$$

**Решение V.** Нека  $BD$  е симетрала на аголот  $\beta$  на  $\triangle ABC$ , тогаш  $\angle ABD = \angle CBD = 60^\circ$ . Конструираме два рамнострани триаголника:  $ABL$ , со страна  $12 \text{ cm}$  и  $BCK$ , со страна  $6 \text{ cm}$  (црт. 5). Нивните висини се однесуваат како  $2:1$ , т.е.:

$$AK : CO = 2 : 1.$$

Правоаголните триаголници  $AKD$  и  $COD$  се слични (Зошто?), па имаме:

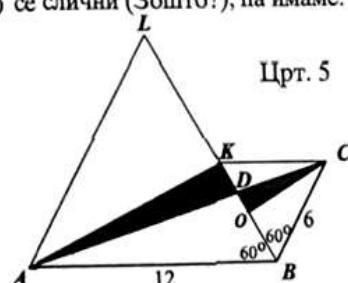
$$\overline{KD} : \overline{OD} = \overline{AK} : \overline{CO} = 2 : 1. \text{ Оттука:}$$

$$\overline{OD} = \frac{1}{3}\overline{OK} = 1 \text{ cm}. \quad \overline{BD} = \overline{BO} + \overline{OD} = 4 \text{ cm}.$$

**Решение VI.** Со симетралата  $\overline{BD} = x$  на аголот  $\beta$ , триаголникот  $ABC$  е поделен на два триаголника  $ABD$  и  $BCD$  (црт. 2), па имаме:

$$P_{ABC} = P_{ABD} + P_{BCD}, \text{ т.е.}$$

$$\frac{12 \cdot 6}{2} \sin 120^\circ = \frac{12 \cdot x}{2} \sin 60^\circ + \frac{6 \cdot x}{2} \sin 60^\circ \text{ или } 12 = 2x + x, \quad x = 4. \text{ Следствено, } \overline{BD} = 4 \text{ cm}$$



Црт. 5