Часть А

К каждой задаче необходимо указать ответ.
Решения приводить не требуется.

1. Лесорубы умеют распиливать бревно на две части за 2 минуты. У них есть 5 бревен длиной 10 метров. За какое время они распилят все бревна на чурбаки длиной 1 метр?

Ответ. 90 минут.

Решение. Первоначально было 5 бревен или 5 частей. После того, как лесорубы завершат свою работу, частей должно оказаться 50. То есть количество частей увеличится на 45. Один распил увеличивает количество частей на один. Значит, распилов будет 45.

2. В Москве в январе было 10 ясных и безветренных дней. 15 дней был ветер и 12 дней шел снег. Сколько дней была метель (то есть снег с ветром)?

Ответ. 6 дней.

Решение. В январе 31 день. Поскольку было 10 дней, когда не было ветра и снега, то дней, когда было хоть что-то, 21. Из них дней без ветра 21–15=6. Тогда дней с метелью 12–6=6.

3. Пачка бумаги в 500 листов имеет толщину 5см. Напечатали книгу в 300 страниц. Какова толщина книги, если толщина обложки (с обеих сторон в сумме) 3мм?

Ответ. 1см 8мм.

Решение. Если 500 листов имеют толщину 5см, то 100 листов имеют толщину 1см. Это значит, что 200 страниц имеют ту же толщину, а 100 страниц – 5мм. Отсюда толщина книги 1,5см + 3мм.

4. В восьмизначном числе 20102010 зачеркните три цифры так, чтобы получилось наименьшее из возможных пятизначное число.

Ответ. 10010.

Решение. Поскольку число не может начинаться с нуля, то наименьшая цифра, с которой должно начинаться искомое число, это 1. Значит, необходимо зачеркнуть первые две цифры «20». Следующие цифры нужно сделать как можно меньше. Очевидно, что следует зачеркнуть еще 2.

5. Три одноклассника учатся в МГУ на механико-математическом факультете (мехмат), вычислительной математики и кибернетики (ВМиК) и химическом (химфак). Из трёх утверждений «Дима учится на химфаке», «Слава – не химик», «Лёша учится не на мехмате» только одно верное. Кто учится на химфаке?

Ответ. Слава.

Решение. Пусть на химфаке учится Дима. Тогда верны как минимум два утверждения: про Диму и про Славу, что не соответствует условию. Пусть Лёша учится на химфаке. Тогда снова верны два утверждения: про Славу и про Лёшу. Пусть на химфаке учится Слава. Проверим, что этот вариант подходит. Действительно, в этом случае может быть так: Дима – мехмат, Слава – химфак, Лёша – ВМиК.

6. Ковровая дорожка покрывает лестницу длиной 100м и высотой 20м. Какова длина дорожки?

Ответ. 120 метров.

Решение. Заметим, что длина дорожки складывается из суммы длин ступенек и суммы высот ступенек. Сумма длин ступенек – это длина лестницы, сумма высот – высота лестницы.

7. Вода при замерзании увеличивается на одну одиннадцатую своего объема. На какую часть своего объема уменьшится лед при обратном превращении в воду?

Ответ. На одну двенадцатую.

Решение. Если вода увеличивается на одну одиннадцатую, то, значит, изначально таких частей было одиннадцать, а стало двенадцать. Поэтому та часть, на которую уменьшится объем льда, составляет уже одну двенадцатую часть объёма.

8. В августе одного из прошлых лет три воскресенья пришлись на четные числа. Какой день недели был 9 августа этого года?

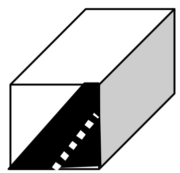
Ответ. Воскресенье.

Решение. Заметим, что два следующих друг за другом воскресенья разной четности, потому что между ними разница в 7 дней. Значит, это были три воскресенья через одно. А поскольку в месяце максимум 5 воскресений, то это первое, третье и пятое. Между первым и пятым воскресеньем разница в 4 недели. Значит первое воскресенье – это 2 августа, а пятое – 30.

9. Расставьте знаки арифметических действий, чтобы получился верный пример: 1234567 = 2010.

Ответ. Например так: $(1 + 23) :4 \times 5 \times 67 = 2010$.

10. Между деревнями Кошки и Мышки построили скоростную трассу. В целях безопасности над трассой построили стеклянное квадратное заграждение (см.рис). Мэр Кошек, проинспектировав сооружение, издал указ увеличить в два раза высоту заграждения. Во сколько раз увеличится расход стекла по сравнению

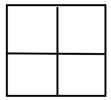


с первоначальным?

Ответ. В 5/3 раза.

Решение. Первоначально заграждение представляет собой три одинаковых прямоугольника. Увеличить в два раза высоту – значит, добавить еще по одному такому прямоугольнику с двух сторон. Значит теперь таких прямоугольников будет 5.

11. Незнайке поручили покрасить клетчатые ставни 2×2 (см.рис) на окнах нового дома в Цветочном городе. Незнайка красит каждую клетку в один из трех цветов.



(а) Сколько различных ставень он сможет получить?

(б) Сколько различных ставень он сможет получить, если ставни можно красить не более чем в два цвета?

(в) Сколько различных ставень он сможет получить, если ставни можно красить в два или три цвета, причем квадратики одного цвета не должны иметь общую сторону?

Ответ. (а) 81; (б) 45; (в) 18.

Решение.

(а) Поскольку каждую клетку можно покрасить в один из трех цветов, то для каждой клетки 3 варианта. Клеток 4. Поэтому всего $3\times3\times3\times3$.

(б) Если цветов два, то для каждой клетки вариантов 2. Поэтому для фиксированных двух цветов вариантов $2\times2\times2\times2=16$. Способов, какими можно выбрать два цвета из трех – 3. Поэтому вариантов 16×3. Однако мы три варианта сосчитали дважды – это варианты одноцветных ставень. Поэтому всего вариантов 45.

(в) Если цветов два, то единственно возможный случай – это красить в один цвет диагонали. Тогда для любых двух фиксированных цветов вариантов 2, выбрать эти два цвета можно тремя способами. Итого 6. Рассмотрим случай окраски в 3 цвета. Тогда возможен только вариант, что одна диагональ выкрашена в один цвет, а две другие клетки разного цвета. Зафиксируем эту диагональ. Тогда два варианта покрасить оставшиеся две клетки в два цвета. Возьмем другую диагональ – тоже два варианта. Всего 4 для каждого выбранного цвета диагонали. Получается вариантов $4\times3=12$ (так как три возможных цвета для диагонали). Плюс посчитанные ранее 6 вариантов.

Часть Б

В этой части кроме ответа требуется привести решение.

1. У Сережи есть 4 палочки длиной 1см, 4 палочки длиной 2см, 7 палочек длиной 3см и 5 палочек длиной 4см. Сможет ли он сложить прямоугольник, использовав все палочки?

Ответ: Нет.

Решение. Предположим, что это Сереже удалось. Тогда сумма длин сторон этого прямоугольника должна быть четна, так как это удвоенная сумма длины и ширины. Сумма же $4\times1 + 4\times2 + 7\times3 + 5\times4$ нечетна.

2. У Кощея есть семечко. Если его полить мёртвой водой, из него начинает расти дерево со скоростью 1 м/час. Если это дерево потом полить живой водой, оно начинает расти со скоростью 2 м/час. Кощей сделал на стене отметку на высоте между 1 и 2 метрами от земли, дал Ивану-царевичу семечко, фляги с живой и мёртвой водой и сказал: «Посади семечко в 10 утра, и чтобы к 11 утра дерево доросло точно до моей отметки». Есть ли у Ивана возможность справиться с заданием Кощея?

Ответ: Да.

Решение. Пусть Кощей отметил точку A. Проведём из неё вертикальный отрезок до земли и отметим на нём точку B на расстоянии 1 м от земли и такую точку C, отличную от точки A, что BC = AB. В 10 утра Иван посадит семечко и польёт его мёртвой водой, а когда дерево дорастёт до отметки C, польёт его живой водой. Без живой воды дерево к 11 утра доросло бы до точки B, а с нею, растя вдвое быстрее, оно дорастёт как раз до точки A.

3. На окружности отмечены семь точек. Ваня выбирает три точки и рисует треугольник с вершинами в этих точках. Миша выбирает четыре точки и рисует четырехугольник с вершинами в выбранных точках. Кто нарисует больше: Ваня треугольников или Миша четырехугольников?

Ответ: Одинаково.

Решение. Пусть когда Ваня выбирает какие-то три точки, Миша выбирает оставшиеся четыре. Тогда если Ваня выбирает еще не выбранные ранее точки, но набор Миши тоже новый. И наоборот, если у Миши оказался новый набор, то у Вани должен быть тоже новый.

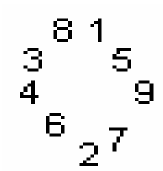
(Для знатоков: мы установили взаимнооднозначное соответствие между множествами (в данном случае треугольников и четырехугольников). Значит, в этих множествах равное число элементов.)

4. У Карабаса-Барабаса есть три шкатулки: медная, серебряная и золотая, и четыре монеты: золотая, серебряная и две медных. Карабас одну монету оставил себе, а остальные три положил в шкатулки (в каждую по одной). На золотой шкатулке написано: «В серебряной и медной лежат разные монеты», на серебряной: «В золотой и медной лежат одинаковые монеты», на медной: «Во всех трех шкатулках нет золотой монеты». Известно, что надпись на шкатулке верна, если в ней лежит монета из того же материала, что и шкатулка. В противном случае надпись ложна. Какая монета лежит в серебряной шкатулке?

Ответ: Медная.

Решение. Рассмотрим медную шкатулку. 1) Если там лежит медная монета, то надпись верна и золотой монеты нет. Это значит, что надпись на золотой шкатулке неверна и в серебряной шкатулке так же лежит медная монета. Легко видеть, что в этом случае условие на серебряной шкатулке также выполняется. 2) В медной шкатулке не лежит медной монеты. Тогда это либо серебряная, либо золотая и на серебряной шкатулке надпись неверна, потому что такая монета только одна. Аналогично, надпись на золотой верна. Поэтому в золотой золотая монета, в медной – серебряная, а в серебряной – медная. В любом случае в серебряной шкатулке лежит медная монета.

5. Числа от 1 до 9 расставлены по кругу, как показано на рисунке. Можно сколько угодно раз менять местами любые два из них, которые дают одинаковый остаток при делении на 3. Можно ли в итоге получить расстановку этих чисел по порядку?



Ответ: Нельзя.

Решение. Заметим, что когда мы меняем местами 2 числа, порядок остатков при делении на 3 не меняется. У правильно упорядоченной последовательности порядок остатков при делении на 3 таков: 1;2;0;1;2;0;1;2;0. Для данной последовательности: 1;2;0;1;2;0;1;0;2. В ней с обеих сторон от одной из цифр 1 стоят нули. Значит, правильного порядка после разрешённых замен не получится.

Творческая Лаборатория «Дважды Два»

Творческая лаборатория «2×2» – содружество преподавателей, студентов, аспирантов и просто математиков, обеспокоенных состоянием математического образования в России. Мы хотим, чтобы наши дети росли любознательными, заинтересованными, грамотными, и стараемся по мере сил этому содействовать. За много лет работы мы создали систему обучения детей математике с 1 по 11 класс. Она включает в себя матклассы, олимпиады различного уровня, кружки в разных точках Москвы.

Кроме олимпиад мы проводим выездные математические школы для школьников от 1 класса. Школы проводятся в период каникул, а также майских праздников. Ближайшая школа ***с 30 апреля по 10 мая***.

Большое внимание мы уделяем также нашим математическим классам на базе разных школ Москвы. В прошлом наши ученики завоевали две золотые медали на международных олимпиадах по математике, а также разнообразные ризы и награды на других соревнованиях России и других стран. В этом году наши девятиклассники с большим успехом приняли участие в третьем (городском) этапе Всероссийской олимпиады школьников по математике и планируют принять участие в заключительном этапе этой олимпиады.

Более подробно со всеми направлениями нашей работы в можете познакомиться на сайте.

Олимпиада 5 класса

Письменный тур.

Результаты письменного тура будут опубликованы ***после 18 февраля*** на нашем сайте. http://mathbaby.ru

Устный тур.

Устный тур пройдет ***21 марта*** в помещении МИРЭА. На него будут приглашены участники, показавшие высокий результат на письменном туре.