Мирјана Докоска, Струга

НЕКОИ КАРАКТЕРИСТИЧНИ НЕРАВЕНСТВА ВО ВРСКА СО ТРИАГОЛНИК

Неравенствата во врска со триаголник т.е. неговите елементи во математичката наука датираат уште од најраните нејзини почетоци. Најстарите меѓу нив произлегуваат од добро познатата Евклидова аксиома, во која се тврди дека збирот на било кои две страни во триаголникот е поголем од третата страна т.е. $a+b>c$, $a+b>c$, $b+c>a$.

Геометриските неравенства за различни елементи во триаголник и денес се актуелни и во центарот на вниманието на многу математичари.

Во првиот дел на оваа работа, обработени се некои карактеристични неравенства за страните на триаголникот, додека во вториот дел се обработени неравенства во врска со другите елементи на триаголникот. При формулирање на тврдењата ќе бидат користени следниве стандардни ознаки за елементите на триаголникот: A, B, C темиња, $\overline{AB}=a$, $\overline{BC}=c$, $\overline{CA}=b$ страни; $\angle A=\angle\alpha$, $\angle B=\angle\beta$, $\angle C=\angle\gamma$ -агли; h_a, h_b, h_c -висини; t_a, t_b, t_c -тежишни линии; r -радиус на впишана, R - радиус на опишана кружница; P - плоштина; s - полупериметар.

1. Некои неравенства во врска со страните на триаголникот

Пример 1. Докажи го неравенството

$$a^2+b^2+c^2 \geq \frac{36}{35}\left(\frac{abc}{s}+s^2\right).$$

Доказ. Неравенството ќе го докажеме со помош на неравенствата меѓу аритметичката, геометриската и квадратната средина т.е. $G_3 \leq A_3$, $A_3 \leq K_3$ каде

$$G_3=\sqrt[3]{abc}, \quad A_3=\frac{a+b+c}{3}, \quad K_3=\sqrt{\frac{1}{3}(a^2+b^2+c^2)}.$$

Имаме,

$$a^2+b^2+c^2 \geq \frac{1}{3}(a+b+c)^2=\frac{4}{3}s^2 \tag{1}$$

$$abc \leq \left[\frac{1}{3}(a+b+c)\right]^3=\frac{8s^3}{27} \tag{2}$$

Од (1) и (2) следува:

$$a^2+b^2+c^2 \geq \frac{4}{3}s^2=\frac{36}{27}s^2=\frac{36}{35}\cdot\frac{35}{27}s^2=\frac{36}{35}\left(s^2+\frac{8}{27}s^3\frac{1}{s}\right)\geq\frac{36}{35}\left(s^2+\frac{abc}{s}\right)$$

што и требаше да се докаже. ♦

Пример 2. Докажи го неравенството

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}<2.$$

Доказ. Од неравенствата $a+b>c$, $b+c>a$, $c+a>b$, последователно добиваме:

$$a+b>\frac{1}{2}(a+b+c)=s,\ a+c>\frac{1}{2}(a+b+c)=s,\ b+c>\frac{1}{2}(a+b+c)=s$$

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}<\frac{a}{s}+\frac{b}{s}+\frac{c}{s}=\frac{2s}{s}=2. \ ♦$$

Пример 3. (Неравенство на *Hadwiger-Finsler*) $a^2+b^2+c^2 \geq 4P\sqrt{3}$.

Доказ. Со помош на равенствата $2P = ab\sin\gamma$ и $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$, даденото неравенство го трансформираме во еквивалентното неравенство:

$$2a^2 + 2b^2 - 2ab\cos\gamma \geq 2ab\sqrt{3}\sin\gamma \quad \text{т.е.}$$

$$2a^2 + 2b^2 - 2ab(\cos\gamma + \sqrt{3}\sin\gamma) \geq 0.$$

Користејќи $2\sin\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$ и $2\cos\frac{\pi}{3} = 1$ последното неравенството се трансформира во обликот

$$a^2 + b^2 - 2ab(\cos\gamma\cos\tfrac{\pi}{3} + \sin\gamma\sin\tfrac{\pi}{3}) \geq 0.$$

Со примена на адиционата теорема $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$ добиваме $a^2 + b^2 - 2ab\cos(\gamma - \frac{\pi}{3}) \geq 0$. Бидејќи $|\cos x| \leq 1$, $\forall x \in \boldsymbol{R}$, имаме

$$a^2 + b^2 - 2ab\cos(\gamma - \tfrac{\pi}{3}) \geq a^2 + b^2 - 2ab = (a-b)^2 \geq 0,$$

од што следува дека почетното неравенство е точно. ♦

2. Некои неравенства во врска со други елементи на триаголникот

Пример 4. Нека $a < b$. Да се докаже дека

$$a + h_a \leq b + h_b \tag{3}$$

Доказ. Од $h_a = \frac{2P}{a}$, $h_b = \frac{2P}{b}$, неравенството (3) го добива обликот

$$a + \tfrac{2P}{a} \leq b + \tfrac{2P}{b} \quad \Leftrightarrow \quad \tfrac{a^2+2P}{a} \leq \tfrac{b^2+2P}{b} \quad \Leftrightarrow \quad a^2b + 2Pb \leq ab^2 + 2aP \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad 2Pb - 2Pa \leq ab^2 - a^2b \quad \Leftrightarrow \quad 2P(b-a) \leq ab(b-a) \quad \Leftrightarrow \quad 2P \leq ab$$

т.е. $P \leq \frac{ab}{2}$, што е точно, бидејќи $P = \dfrac{ab}{2}\sin\gamma$ и $0 < \sin\gamma \leq 1$. ♦

Пример 5. Да се докаже неравенството

$$\frac{1}{2r} < \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} < \frac{1}{r} \tag{4}$$

Доказ. Од релациите $P = rs$ и $P = \frac{a h_a}{2}$, $P = \frac{b h_b}{2}$ добиваме

$$\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} = \frac{a}{2P} + \frac{b}{2P} = \frac{a+b}{2P} = \frac{a+b}{2rs} = \frac{a+b}{a+b+c} \cdot \frac{1}{r} < \frac{a+b}{a+b}\frac{1}{r} = \frac{1}{r},$$

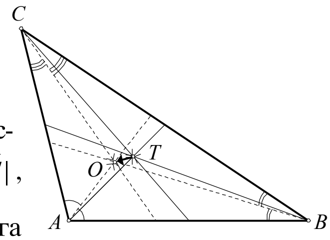
со што е докажана десната страна на (4).
Од друга страна од релацијата $a + b > c$ имаме

$$\frac{a+b}{a+b+c} > \frac{a+b}{a+b+(a+b)} = \frac{a+b}{2(a+b)} = \frac{1}{2},$$

и ако се искористи равенството $\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} = \frac{a+b}{a+b+c} \cdot \frac{1}{r}$, добиваме дека важи и левата страна на (4). ♦

Пример 6. Да се докаже неравенството

$$t_a^2 + t_b^2 + t_c^2 \le \frac{27}{4} R^2 .$$



Доказ. Во доказот на ова неравенство ќе користиме вектори. Од условот имаме $t_a = \frac{3}{2}|\overrightarrow{AT}|$, $t_b = \frac{3}{2}|\overrightarrow{BT}|$, $t_c = \frac{3}{2}|\overrightarrow{CT}|$, $\overrightarrow{AT} + \overrightarrow{BT} + \overrightarrow{CT} = \vec{o}$ и $|\overrightarrow{AO}| = |\overrightarrow{BO}| = |\overrightarrow{CO}| = R$ сега од својствата на скаларниот производ:

$$|\vec{a} + \vec{b}|^2 = (\vec{a} + \vec{b})(\vec{a} + \vec{b}) = \vec{a}\vec{a} + 2\vec{a}\vec{b} + \vec{b}\vec{b} = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2\vec{a}\vec{b} \quad \text{и} \quad \vec{o}\vec{c} = 0$$

добиваме:

$$\begin{aligned} 3R^2 &= |\overrightarrow{AO}|^2 + |\overrightarrow{BO}|^2 + |\overrightarrow{CO}|^2 = |\overrightarrow{AT} + \overrightarrow{TO}|^2 + |\overrightarrow{BT} + \overrightarrow{TO}|^2 + |\overrightarrow{CT} + \overrightarrow{TO}|^2 \\ &= |\overrightarrow{AT}|^2 + |\overrightarrow{BT}|^2 + |\overrightarrow{CT}|^2 + 3|\overrightarrow{TO}|^2 + 2(\overrightarrow{AT} + \overrightarrow{BT} + \overrightarrow{CT})\,\overrightarrow{TO} \\ &\ge \frac{4}{9}t_a^2 + \frac{4}{9}t_b^2 + \frac{4}{9}t_c^2 + 3|\overrightarrow{TO}|^2 \ge \frac{4}{9}(t_a^2 + t_b^2 + t_c^2) \end{aligned}$$

што и требаше да се докаже.

Последица 1. За било кој триаголник

$$t_a + t_b + t_c \le \frac{9}{2} R .$$

Докажи!

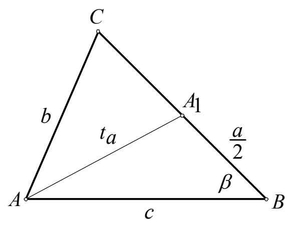
Доказ. Од неравенството меѓу аритметичка и квадратна средина $A_3 \le K_3$ и неравенството од пример 6 добиваме:

$$\left(\frac{t_a+t_b+t_c}{3} \right)^2 \le \frac{1}{3}(t_a + t_b + t_c) \le \frac{1}{3} \cdot \frac{27}{4} R^2 \quad \text{т.е.} \quad t_a + t_b + t_c \le \frac{9}{2} R .$$

Последица 2. Да се докаже неравенството $s \le \frac{3R\sqrt{3}}{2}$.

Доказ. Најпрво ќе го докажеме равенството

$$t_a^2 + t_b^2 + t_c^2 = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2). \tag{1}$$



Од косинусната теорема применета на ΔABA_1 и ΔABC добиваме:

$$t_a^2 = c^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 - 2c\frac{a}{2}\cos\beta \quad \text{и}$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ca\cos\beta .$$

Од последните две равенства следува:

$$t_a^2 = c^2 + \frac{a^2}{4} - \frac{a^2+c^2-b^2}{2} = \frac{1}{4}(2b^2 + 2c^2 - a^2). \tag{2}$$

Аналогно добиваме:

$$t_b^2 = \frac{1}{4}(2a^2 + 2c^2 - b^2) \tag{3}$$

$$t_c^2 = \frac{1}{4}(2a^2 + 2b^2 - c^2) \tag{4}$$

Ако ги собереме равенствата (2), (3) и (4) го добиваме равенството (1). Од равенството (1) и неравенството во пример 6 следува $a^2+b^2+c^2 \le 9R^2$. Конечно од последното неравенство и неравенствато меѓу аритметичка и квадратна средина добиваме:

$$3R^2 \ge \frac{a^2+b^2+c^2}{3} \ge \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2 = \left(\frac{2s}{3}\right)^2 = \frac{4s^2}{9} \text{ т.е. } s \le \frac{3R\sqrt{3}}{2}. \ ♦$$

Пример 7. За произволен триаголник ΔABC точно е неравенството:

$$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma \le \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Докажи!

Доказ. Според синусната теорема имаме: $\sin\alpha = \frac{a}{2R}$, $\sin\beta = \frac{b}{2R}$ и $\sin\gamma = \frac{b}{2R}$. Со примена на последиците 1 и 2 имаме:

$$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = \frac{a+b+c}{2R} = \frac{s}{R} \le \frac{3R\sqrt{3}}{2R} = \frac{3\sqrt{3}}{2}. \ ♦$$

3. Задачи за самостојна работа

Докакажи ги неравенствата:

1. $(s-a)(s-b)(s-c) \le \frac{1}{8}abc$

2. $a^2(s-a)+b^2(s-b)+c^2(s-c) \le \frac{3}{2}abc$

3. $\frac{1}{a^4}+\frac{1}{b^4}+\frac{1}{c^4} \ge \frac{4}{3}\left(\frac{S}{abc}\right)^2$

4. $3(a^3+b^3+c^3+3abc) \le 2(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)$

5. $h_a \le \sqrt{s(s-a)}$

6. $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma \le \frac{3}{2}$

7. $a^2+b^2+c^2 \ge 4\sqrt{3}P+(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2$

8. $r \le \frac{a+b}{6}$

9. $a < \frac{b+c}{2} \Rightarrow \alpha < \frac{\beta+\gamma}{2}$

10. $tg^2\frac{\alpha}{2}+tg^2\frac{\beta}{2}+tg^2\frac{\gamma}{2} \ge 1$

Литература:

[1] **Walter Janous,** *Неравенства во триаголни*, Triangle 1 (1997)

[2] **Д. Димоски, К. Тренчески, Р. Малчески, Б. Јосифоски,** *Практикум по елементарна математика*, Просветно дело, Скопје, 1993