

Валентина Гоговска, Скопје

МАКСИМУМ И МИНИМУМ НА ТРИГОНОМЕТРИСКИ ФУНКЦИИ И НИВНА ПРИМЕНА

Во оваа работа ќе го разгледаме наоѓањето на максимум и минимум на посложени тригонометриски функции и на примената на тригонометриските функции во наоѓање на екстремни вредности на некои рационални функции.

Суштината на постапката се состои во користењето на ограниченоста на функциите $\sin x$ и $\cos x$ при наоѓање на минимум и максимум на дадена функција.

1. Дефиниција и основни својства на минимумот и максимумот

Дефиниција 1. За реалниот број M ќе велиме дека е максимум на функцијата $F(x)$ во множеството D ако:

1° за секој $x \in D$, $F(x) \leq M$

2° постои $x_0 \in D$, таков што $F(x_0) = M$.

Притоа пишуваме $y_{\max} = F(x_0)$.

Дефиниција 2. За реалниот број m ќе велиме дека е минимум на функцијата $F(x)$ во множеството D ако:

1° за секој $x \in D$, $F(x) \geq m$

2° постои $x_0 \in D$, за кое $F(x_0) = m$

Притоа пишуваме $y_{\min} = F(x_0)$.

Теорема 1. Ако $k > 0$, тогаш kM е максимум за функцијата $kF(x)$ во множеството D ако и само ако M е максимум на функцијата $F(x)$ во D .

Доказ. Нека kM е максимум на функцијата $kF(x)$ во D . Според дефиниција 1 имаме:

1° за секој $x \in D$, $kF(x) \leq kM$

2° постои $x_0 \in D$, таков што $kF(x_0) = kM$.

Од претходно изнесеното, множејќи со $\frac{1}{k} > 0$ добиваме

3° за секој $x \in D$, $F(x) \leq M$

4° постои $x_0 \in D$, таков што $F(x_0) = M$,

што значи дека M е максимум на функцијата $F(x)$.

Нека M е максимум на функцијата $F(x)$ во множеството D . Од дефиниција 1 следува

5° за секој $x \in D$, $F(x) \leq M$

6° постои $x_0 \in D$, таков што $F(x_0) = M$.

Ако во 5° и 6° помножиме $k > 0$ добиваме

7° за секој $x \in D$, $kF(x) \leq kM$

8° постои $x_0 \in D$, таков што $kF(x_0) = kM$,

што значи дека kM е максимум за функцијата $kF(x)$ во D . ♦

Доказите на теоремите 2, 3 и 4 се аналогни на доказот на теорема 1. Деталите ги препуштаме на читателот за вежба.

Теорема 2. Ако $k > 0$, тогаш km е минимум за функцијата $kF(x)$ во множеството D ако и само ако m е максимум на функцијата $F(x)$ во D .

Теорема 3. Ако $k < 0$, тогаш km е максимум за функцијата $kF(x)$ во множеството D ако и само ако m е минимум на функцијата $F(x)$ во D .

Теорема 4. Ако $k < 0$, тогаш kM е минимум за функцијата $kF(x)$ во множеството D ако и само ако M е максимум на функцијата $F(x)$ во D .

2. Максимум и минимум на тригонометриски функции

Како што рековме, при нашите разгледувања со трансформирање на дадената функција со помош на тригонометриските функции $\sin x$ и $\cos x$, користејќи дека $-1 \leq \sin x \leq 1$, $-1 \leq \cos x \leq 1$, ќе наоѓаме максимум и минимум на дадената функција. Ќе разгледаме неколку задачи.

Пример 1. Одреди го минимумот и максимумот на функцијата

$$f(x) = 4 - 3 \cos x, \quad x \in \mathbf{R}.$$

Решение. Од двојното неравенство $-1 \leq \cos x \leq 1$ наоѓаме

$$\begin{aligned} 3 &\geq -3 \cos x \geq -3, \\ 7 &\geq \underbrace{4 - 3 \cos x}_{f(x)} \geq 1 \end{aligned}$$

Значи, минимум за функцијата $f(x)$ е 1, а максимум е 7. ♦

Пример 2. Најди го минимумот и максимумот на функцијата

$$y = \frac{3}{\sqrt{2}} \cos x + \frac{3\sqrt{2}}{2} \sin x, \quad x \in \mathbf{R}.$$

Решение. Ако искористиме дека $\cos \frac{\pi}{4} = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ и

$$\cos(x-t) = \cos x \cos t + \sin x \sin t$$

последователно наоѓаме

$$\begin{aligned} y &= \frac{3}{\sqrt{2}} \cos x + \frac{3\sqrt{2}}{2} \sin x = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} \cos x + \frac{3\sqrt{2}}{2} \sin x = 3 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos x + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin x \right) \\ &= 3 \left(\cos x \cdot \cos \frac{\pi}{4} + \sin x \cdot \sin \frac{\pi}{4} \right) = 3 \cos \left(x - \frac{\pi}{4} \right). \end{aligned}$$

Но, за функцијата $y_1 = \cos \left(x - \frac{\pi}{4} \right)$ важи $y_{1\min} = -1$, за $x = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$ и $y_{1\max} = 1$, за $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$. Конечно, $y_{\min} = -3$, за $x = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$ и $y_{\max} = 3$, за $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$. ♦

Пример 3. Определи го минимумот и максимумот на функцијата

$$f(x) = \sqrt{3} \cos 2x + \sin 2x, \quad x \in [0, \pi].$$

Решение. Ако искористиме дека $\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ и

$$\cos(x-t) = \cos x \cos t + \sin x \sin t$$

последователно наоѓаме

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{3} \cos 2x + \sin 2x = 2 \cdot \frac{1}{2} (\sqrt{3} \cos 2x + \sin 2x) \\ &= 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos 2x + \frac{1}{2} \sin 2x \right) = 2 \cos \left(\frac{\pi}{6} - 2x \right) = 2 \cos \left(2x - \frac{\pi}{6} \right). \end{aligned}$$

Сега од $-1 \leq \cos(2x - \frac{\pi}{6}) \leq 1$, што значи дека $-2 \leq 2 \cos(2x - \frac{\pi}{6}) \leq 2$, па затоа $f(x) \in [-2, 2]$. Јасно, $f_{\min} = -2$ кога $\cos(2x - \frac{\pi}{6}) = -1$ т.е. кога $2x - \frac{\pi}{6} = \pi + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$ односно $x = \frac{7\pi}{12} + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$. Но, $x \in [0, \pi]$ па затоа $f_{\min} = -2$ за $x = \frac{7\pi}{12}$.

Аналогно, $f_{\max} = 2$, за $x = \frac{\pi}{12}$. ♦

Пример 4. Да се определат минимум и максимум на функцијата

$$y = \cos 2x - 4 \sin x.$$

Решение. Ја трансформираме дадената функција

$$\begin{aligned} y &= \cos 2x - 4 \sin x = \cos^2 x - \sin^2 x - 4 \sin x \\ &= 1 - 2 \sin^2 x - 4 \sin x = -2 \left(\sin^2 x + 2 \sin x - \frac{1}{2} \right) \\ &= -2 \left[(\sin x + 1)^2 - 1 - \frac{1}{2} \right] = -2 (\sin x + 1)^2 + 3. \end{aligned}$$

Според тоа, $y_{\max} = 3$, кога $\sin x + 1 = 0$, т.е. кога $x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$ и $y_{\min} = -5$, кога $\sin x + 1 = \pm 2$, т.е. кога $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$. ♦

Пример 5. Докажи дека функцијата $y = 3 + 4 \cos x + \cos 2x$ е ненегативна за секој $x \in \mathbf{R}$.

Решение. Ја трансформираме дадената функција и добиваме

$$\begin{aligned} y &= 3 + 4 \cos x + \cos 2x = 3 + 4 \cos x + \cos^2 x - \sin^2 x \\ &= 3 + 4 \cos x + 2 \cos^2 x - 1 = 2 \cos^2 x + 4 \cos x + 2 = 2 (\cos x + 1)^2. \end{aligned}$$

Но, $2(\cos x + 1)^2 \geq 0$, за секое $x \in \mathbf{R}$, што значи дека функцијата е ненегативна за секој $x \in \mathbf{R}$. ♦

Пример 6. Да се определи минимумот на функцијата $y = (\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x)^4$.

Решение. Имаме

$$y = (\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x)^4 = \left(\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} \right)^4 = \left(\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cos x} \right)^4 = \left(\frac{2}{\sin 2x} \right)^4 = \frac{16}{\sin^4 2x}.$$

Бидејќи количникот $\frac{16}{\sin^4 2x}$ достигнува минимум кога именителот достигнува

максимум, а максимум на $\max\{\sin^4 2x \mid x \in \mathbf{R}\} = 1$ за $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$ добиваме дека $y_{\min} = 16$, за $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$. ♦

Пример 7. Да се определи минимумот на функцијата $y = \frac{1}{\cos^6 x} + \frac{1}{\sin^6 x}$.

Решение. Ја трансформираме дадената функција и добиваме

$$\begin{aligned} y &= \frac{\sin^6 x + \cos^6 x}{\sin^6 x \cos^6 x} = \frac{(\sin^2 x + \cos^2 x)(\cos^4 x - \sin^2 x \cos^2 x + \sin^4 x)}{\frac{2^6}{\sin^6 x \cos^6 x}} = \frac{\sin^4 x + 2\sin^2 x \cos^2 x + \cos^4 x - 3\sin^2 x \cos^2 x}{\frac{\sin^6 2x}{2^6}} \\ &= \frac{2^6[(\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - \frac{3}{4}\sin^2 2x]}{\sin^6 2x} = \frac{2^6(1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x)}{\sin^6 2x} = \frac{2^4(4 - 3\sin^2 2x)}{\sin^6 2x}. \end{aligned}$$

Јасно, дадената функција прима најмала вредност, ако истовремено броителот прима најмала вредност, а именителот прима најголема вредност, а тоа е кога $\sin 2x = \pm 1$, т.е. кога $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{4}$, $k \in \mathbf{Z}$. Притоа, $y_{\min} = 16$. ♦

3. Примена на тригонометриските функции во задачи за наоѓање на максимум и минимум

Во овој дел ќе решиме една задача од која може да се види примената на тригонометриските функции во решавањето на екстремални задачи за триаголник, како и две задачи за наоѓање на максимум и минимум од некои функции.

Пример 8. Должината на едната страна на $\triangle ABC$ е еднаква на a , а аголот спроти неа е еднаков на α . Да се определат должините на другите две страни на триаголникот така што $\triangle ABC$ да има најголем периметар.

Решение. Од синусна теорема $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$ наоѓаме $b = \frac{a \sin \beta}{\sin \alpha}$ и $c = \frac{a \sin \gamma}{\sin \alpha}$. Ако замениме во $L = a + b + c$ и го трансформираме добиениот израз добиваме:

$$\begin{aligned} L &= a + b + c = a + \frac{a \sin \beta}{\sin \alpha} + \frac{a \sin \gamma}{\sin \alpha} = a + \frac{a(\sin \beta + \sin \gamma)}{\sin \alpha} \\ &= a + \frac{a}{\sin \alpha} \cdot 2 \sin \frac{\beta + \gamma}{2} \cos \frac{\beta - \gamma}{2} = a + \frac{a}{\sin \alpha} \cdot 2 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta - \gamma}{2}. \end{aligned}$$

Јасно, периметарот L има најголема вредност, кога $\cos \frac{\beta - \gamma}{2}$ има најголема вредност, т.е. за $\cos \frac{\beta - \gamma}{2} = 1$, оттука $\frac{\beta - \gamma}{2} = 0$ и $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ добиваме дека најголемата вредност периметарот ја достигнува за $\beta = \gamma$. Значи, $\triangle ABC$ е рамнокрак т.е. $b = c$.

Според тоа, ако за $\triangle ABC$ е дадена страна и аголот спроти неа, тогаш тој ќе има најголем периметар ако е рамнокрак триаголник чија основа е дадената страна, а кракот е:

$$b = \frac{a \sin \beta}{\sin \alpha} = \frac{a \sin \frac{\pi - \alpha}{2}}{\sin \alpha} = \frac{a \cos \frac{\alpha}{2}}{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}} = \frac{a}{2 \sin \frac{\alpha}{2}}. \quad \blacklozenge$$

Пример 9. Да се определи минимум на функцијата $y = \sqrt{x^2 - 2x + 8}$.

Решение. Бидејќи $D_f = \mathbf{R}$ можеме да ја воведеме смената $x = \operatorname{tg} \alpha$.

Имаме,

$$\begin{aligned} g(x) = x^2 - 2x + 8 &= \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} - \frac{2 \sin \alpha}{\cos \alpha} + 8 = \frac{\sin^2 \alpha - 2 \sin \alpha \cos \alpha + 8 \cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} \\ &= \frac{1 - 2 \sin \alpha \cos \alpha + 7 \cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{(\sin \alpha - \cos \alpha)^2}{\cos^2 \alpha} + 7, \end{aligned}$$

што значи дека $g_{\min} = 7$, кога $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$; $k \in \mathbf{Z}$. Конечно, $y_{\min} = \sqrt{7}$. ♦

Пример 10. Да се определат максимум и минимум на функцијата

$$F(x) = \frac{1+x^4}{(1+x^2)^2}.$$

Решение. Бидејќи $D_f = \mathbf{R}$ можеме да ја воведеме смената $x = \operatorname{tg} \alpha$.

Имаме,

$$F(x) = \frac{1+x^4}{(1+x^2)^2} = \frac{1+\operatorname{tg}^4 \alpha}{(1+\operatorname{tg}^2 \alpha)^2} = \frac{1+\frac{\sin^4 \alpha}{\cos^4 \alpha}}{\left(1+\frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}\right)^2} = \frac{\frac{\cos^4 \alpha + \sin^4 \alpha}{\cos^4 \alpha}}{\frac{1}{\cos^4 \alpha}} = \cos^4 \alpha + \sin^4 \alpha = \dots = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2\alpha.$$

Но, $0 \leq \sin^2 \alpha \leq 1$, па затоа $F(x)$ прима најмала вредност кога $\sin^2 \alpha$ прима најголема вредност и тоа е 1. Притоа, $F_{\min} = \frac{1}{2}$, за $\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$, т.е. за $x = 1$. Аналогно $F_{\max} = 1$ за $\alpha = k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$ т.е. за $x = 0$. ♦

4. Задачи за самостојна работа

На крајот од оваа работа ви предлагаме самостојно да ги решите следните задачи.

Задача 1. Да се определи вредностите на x , за кои функцијата

$$y = 2 \cos^2 x - 3\sqrt{3} \cos x - \sin^2 x + 5$$

достигнува максимум, односно минимум.

Задача 2. Да се определат максимум и минимум на функцијата

$$f(x) = \sin^6 x + \cos^6 x.$$

Задача 3. Да се определи минимум за функцијата

$$f(x) = \frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\operatorname{tg}^2 x} + \frac{1}{\operatorname{ctg}^2 x}.$$