

VII олимпијада

1. Најди ги сите реални броеви $x \in [0, 2\pi]$ за кои е исполнето неравенството

$$2 \cos x \leq \sqrt{1 + \sin 2x} - \sqrt{1 - \sin 2x} \leq \sqrt{2}.$$

Решение. Со квадрирање на десната страна на неравенството се добива неравенството

$$2 - 2\sqrt{(1 + \sin 2x)(1 - \sin 2x)} \leq 2$$

кое точно. Левата страна на неравенството ќе ја запишеме во облик

$$2 \cos x \leq \|\sin x + \cos x\| - \|\sin x - \cos x\|.$$

За $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$, $\cos x \leq 0$, па според тоа неравенството е исполнето. За

$0 \leq x < \frac{\pi}{4}$ исполнето е

$$\|\sin x + \cos x\| - \|\sin x - \cos x\| = 2 \sin x < 2 \cos x,$$

па според тоа неравенството не е исполнето. За $\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, десната страна на последното неравенство е

$$\|\sin x + \cos x\| - \|\sin x - \cos x\| = 2 \cos x$$

па според тоа неравенството е исполнето. Слично се покажува дека неравенството е исполнето за $\frac{3\pi}{2} \leq x \leq \frac{7\pi}{4}$, а не е исполнето за $\frac{7\pi}{4} < x \leq 2\pi$. Значи, двете неравенства се исполнети за $\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{7\pi}{4}$.

2. Даден е системот равенки

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0$$

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = 0$$

чии коефициентите ги задоволуваат условите:

а) a_{11}, a_{22}, a_{33} се позитивни,

б) останатите коефициенти се негативни,

в) во секоја равенка збирот на коефициентите е позитивен.

Докажи дека $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ е единствено решение на системот.

Решение. Нека (x_1, x_2, x_3) е решение на дадениот систем, при што

$$|x_1| \geq |x_2| \geq |x_3|.$$

Останатите случаи се сведуваат на аналогни разгледувања, при што е потребно само да се изврши замена на индексите.

Ако $x_1 = 0$, тогаш $x_1 = x_2 = x_3 = 0$. Ако $|x_1| > 0$, тогаш

$$a_{11} + a_{12} \frac{x_2}{x_1} + a_{13} \frac{x_3}{x_1} \geq a_{11} - |a_{12}| \frac{|x_2|}{|x_1|} - |a_{13}| \frac{|x_3|}{|x_1|} \geq a_{11} - |a_{12}| - |a_{13}|$$

$$= a_{11} + a_{12} + a_{13} > 0$$

Последното противречи на условот на задачата, па затоа $|x_1| = 0$, т.е. единствено решение на разгледуваниот систем е $x_1 = x_2 = x_3 = 0$.

3. Даден е тетраедар $ABCD$. Работ AB има должина a , CD има должина b , растојанието меѓу разминувачките прави AB и CD е d и аголот меѓу нив е еднаков на ω . Нека рамнина π , која е паралелна со правите AB и CD , го дели тетраедарот на два дела. Пресметај го односот на нивните волумени ако се знае дека односот на растојанието од AB до π и растојанието од CD до π е еднаков на k .

Решение. Нека растојанието меѓу рамнината π и правата CD е x . Тогаш нејзиниот пресек со тетраедарот е паралелограм ($MN \parallel AB \parallel EN$ и $NL \parallel CD \parallel ME$) и неговата плоштина е

$$\overline{MN} \cdot \overline{ME} \cdot \sin \omega = \frac{ax}{d} \cdot \frac{b(d-x)}{d} \cdot \sin \omega.$$

Според тоа

$$V_1 = \int_0^x \frac{at}{d} \cdot \frac{b(d-t)}{d} \sin \omega dt$$

$$= \left(\frac{abx^2}{2d} - \frac{abx^3}{3d^2} \right) \sin \omega.$$

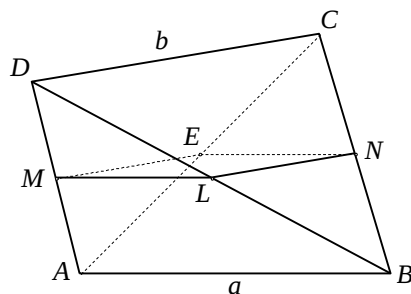
Аналогно се добива

$$V_2 = \left(\frac{aby^2}{2d} - \frac{aby^3}{3d^2} \right) \sin \omega$$

каде y е растојание меѓу AB и π .

Значи, односот на волумените е $\frac{V_2}{V_1} = \frac{3dy^2 - 2y^3}{3dx^2 - 2x^3}$, и бидејќи $x = \frac{d}{k+1}$, $y = \frac{dk}{k+1}$

добиваме $\frac{V_2}{V_1} = k^2 \frac{k+3}{3k+1}$.



Црп. 7.1.

4. Најди реални броеви x_1, x_2, x_3, x_4 такви што збирот на секој од нив со производот на преостанатите е еднаков на 2.

Решение. Од условот на задачата добиваме дека броевите x_1, x_2, x_3, x_4 го задоволуваат системот равенки

$$x_1 + x_2 x_3 x_4 = 2$$

$$x_2 + x_1 x_3 x_4 = 2$$

$$x_3 + x_1 x_2 x_4 = 2$$

$$x_4 + x_1 x_2 x_3 = 2$$

Ако овие равенки ги помножиме со x_1, x_2, x_3, x_4 соодветно, и ставиме $p = x_1 x_2 x_3 x_4$, добиваме квадратна равенка $\lambda^2 - 2\lambda + p = 0$, што значи дека меѓу броевите x_1, x_2, x_3, x_4 , кои се нејзини решенија, може да има најмногу два различни броја u и v .

1° За $x_1 = x_2 = x_3 = x_4$, добиваме $x_1^3 + x_1 = 2$ и како функцијата $f(x) = x^3 + x$ е строго растечка функција добиваме дека единствено решение е $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 1$.

2° Ако $x_1 = u$, $x_2 = x_3 = x_4 = v$, тогаш $u + v^3 = 2$ и $v + uv^2 = 2$. Ако последните две равенки ги одземеме добиваме $(u - v)(1 - v^2) = 0$. За $v = 1$ се добива веќе добиеното решение од 1°, а за $v = -1$, $u = 3$ се добива ново решение $x_1 = 3$, $x_2 = x_3 = x_4 = -1$.

3° Ако $x_1 = x_2 = u$ и $x_3 = x_4 = v$ се добива системот равенки $u + uv^2 = 2$ и $v + vu^2 = 2$. Ако од првата равенка ја одземеме втората добиваме $(u - v)(1 - uv) = 0$. За $u = v$ се добива решението од 1°. За $uv = 1$ од $u + uv^2 = 2$ добиваме $u + v = 2$, од каде добиваме $u = v = 1$, како и во случајот 1°.

5. Даден е $\triangle OAB$ со $\angle BOA = \alpha$ ($\alpha < 90^\circ$). Низ точка $M \neq O$, се повлечени нормали MP на OA и MQ на OB . Нека H е ортоцентар на триаголникот OPQ . Најди го геометриското место на H ако

- а) M припаѓа на страната AB ,
 б) M лежи внатре во $\triangle OAB$.

Решение. а) Нека точките $A_1, B_1, P, Q, P_1, Q_1, A_2, B_2$ се како на црт. 7.2, при што се исполнети условите:

$$MQ \parallel AA_1 \parallel PP_1 \parallel BB_1 \perp OB, MP \parallel BB_1 \parallel QQ_1 \parallel AA_1 \perp OA$$

Од Талесовата теорема следува:

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{MB}} = \frac{\overline{AP}}{\overline{PB_1}} = \frac{\overline{A_1P_1}}{\overline{P_1B_2}} \quad \text{и} \quad \frac{\overline{AM}}{\overline{MB}} = \frac{\overline{AQ}}{\overline{QB}} = \frac{\overline{A_2Q_1}}{\overline{Q_1B_1}}. \quad (*)$$

Ќе докажеме дека ортоцентарот H на триаголникот OPQ (т.е. пресекот на висините PP_1 и QQ_1) се наоѓа на отсечката A_1B_1 . Нека K е пресек на висината PP_1 и правата A_1B_1 . Од сличноста $\triangle B_1A_1B_2 \sim \triangle KA_1P_1$ и (*) се добива

$$\frac{\overline{A_1P_1}}{\overline{P_1B_2}} = \frac{\overline{A_1K}}{\overline{KB_1}} \quad \text{и} \quad \frac{\overline{A_2Q_1}}{\overline{Q_1B_1}} = \frac{\overline{A_1K}}{\overline{KB_1}}.$$

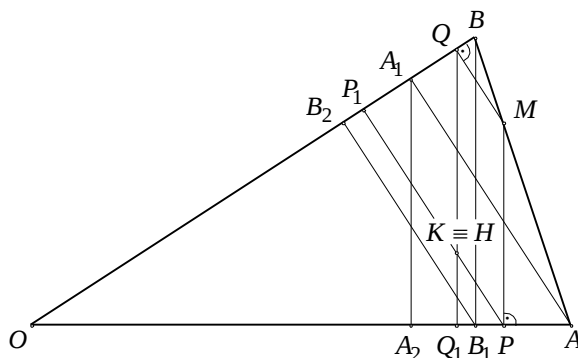
Од последните две равенства следува дека $\triangle A_1 A_2 B_1 \sim \triangle K Q_1 B_1$, па затоа $K Q_1 \perp OA$, т.е. точката K се наоѓа на висината $Q_1 Q$, што значи дека K се совпаѓа со ортоцентарот H , т.е. ортоцентарот H припаѓа на $A_1 B_1$.

Сега не е тешко да се види дека за секоја точка

K од отсечката $A_1 B_1$ (и само за тие точки) постои точка M на AB таква што K е ортоцентар на $\triangle OPQ$, за $MP \perp OA$ и $MQ \perp OB$.

б) Ако точката M е во внатрешноста на $\triangle OAB$, тогаш постои отсечка $A'B' \parallel AB$ таква што M припаѓа на $A'B'$. Од сличноста на триаголниците $OA'B'$ и OAB , следува дека ортоцентарот H на триаголникот $OP'Q'$ ($MP' \perp OA'$, $MQ' \perp OB'$) е на отсечката $A_1'B_1'$ која се пресликува во отсечката $A_1 B_1$, со хомотетија со центар во точката O и коефициент $k = \frac{OA'}{OA}$.

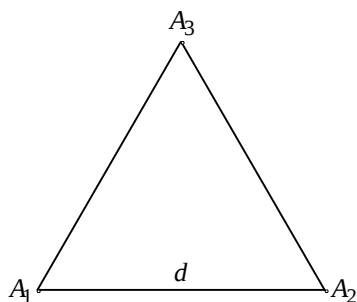
Сега од својствата на хомотетијата, следува дека бараното геометриско место за точката H е внатрешноста на $\triangle OA_1 B_1$.



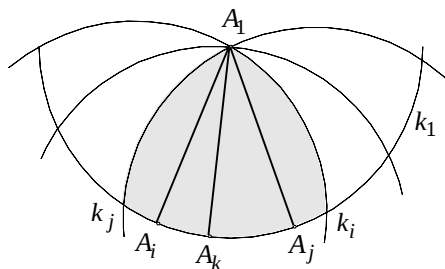
Црпш. 7.2.

6. Во рамнина се дадени n ($n \geq 3$) точки. Нека d е најголемото растојание меѓу две од овие точки. Докажи дека од точките може да се формираат најмногу n парови такви што растојанието меѓу точките во секој пар е еднакво на d .

Решение. Доказот ќе го изведеме со математичка индукција. Најголемото растојание меѓу две од n дадени точки, го нарекуваме дијаметар и го означу-



Црпш. 7.3.



Црпш. 7.4.

ваме со d .

(a) Ако се дадени три точки тогаш бројот на дијаметри може да биде најмногу три, и тоа кога $\triangle A_1 A_2 A_3$ е рамностран.

(b) Нека за некој $n \geq 3$ бројот на дијаметри е еднаков на n . Доволно е да докажеме дека $\{A_k A_l \mid \overline{A_k A_l} = d = \max_{i,j=1,2,\dots,n+1} \overline{A_i A_j}\}$ има најмногу $n+1$ елемент.

Ги повлекуваме сите дијаметри во множеството од $n+1$ точки $A_1, A_2, A_3, \dots, A_{n+1}$. Можни се два случаи.

1° Од секоја од дадените $n+1$ точки поаѓаат најмногу два дијаметри. Тогаш, најголемиот број на дијаметри е $2(n+1)\frac{1}{2} = n+1$, бидејќи секој дијаметар се брои два пати.

2° Од една точка, на пример од A_1 , поаѓаат барем три дијаметри. Нека тие дијаметри се $A_1 A_i$, $A_1 A_j$ и $A_1 A_k$. Бидејќи $\overline{A_1 A_i} = \overline{A_1 A_j} = \overline{A_1 A_k} = d$, точките A_i, A_j и A_k лежат на кружница со центар A_1 и радиус d . Бидејќи $\overline{A_i A_j}$, $\overline{A_i A_k}$, $\overline{A_j A_k} \leq d$, точките A_i, A_j и A_k се наоѓаат во кружен исечок со централен агол не поголем од 60° . Ако точката A_k е на кружниот лак $A_i A_j$ ($\angle A_j A_1 A_i \leq 60^\circ$), тогаш сите $n+1$ точки лежат во пресекот на кружниците k_1, k_i и k_j (k_i и k_j се кружници со радиуси d и со центри во точките A_i и A_j , соодветно). Тогаш A_1 е единствена точка од даденото множество точки која од A_k е на растојание d , т.е. од A_k поаѓа еден единствен дијаметар $A_k A_1$. Множеството од n точки $\{A_1, A_2, A_3, \dots, A_{n+1}\} \setminus \{A_k\}$ има, според индуктивната претпоставка, најмногу n дијаметри. Ако во тоа множество ја додадеме точката A_k , од која поаѓа само еден дијаметар, добиваме множество со $n+1$ точка кое има најмногу $n+1$ дијаметар.

Да ги разгледаме уште случаите кога овој број на дијаметри се достигнува. Ако n е непарен број доволно е да се земат темињата на правилен n -аголник. Ако n е парен, се земаат сите темиња на правилен $(n-1)$ -аголник

$A_1, A_2, A_3, \dots, A_{n-1}$ и на лакот на кружницата со центар во $A_{\frac{n}{2}}$ и дијаметар

$d = \overline{A_{\frac{n}{2}} A_1}$ било која точка помеѓу точките A_1 и A_{n-1} .