



8th European Mathematical Cup

14th December 2019

Junior Category



1. На секој природен број му е придружен број од множеството $\{0,1,2\}$ на следниов начин:

ако на природниот број k му е придружен бројот j , тогаш на бројот $k+j$ му е придружен бројот 0.

Нека S е збирот на придружените броеви на првите 2019 природни броеви. Определи ја најголемата можна вредност на S .

2. Низата $x_1, x_2, \dots, x_k, \dots$ е определена со $x_1 = \sqrt{2}$ и

$$x_{n+1} = x_n + \frac{1}{x_n}, \text{ за } n \in \mathbb{N}.$$

Докажи дека

$$\frac{x_1^2}{2x_1x_2-1} + \frac{x_2^2}{2x_2x_3-1} + \dots + \frac{x_{2018}^2}{2x_{2018}x_{2019}-1} + \frac{x_{2019}^2}{2x_{2019}x_{2020}-1} > \frac{2019^2}{x_{2019}^2 + \frac{1}{x_{2019}^2}}.$$

3. Нека ABC е триаголник со опишана кружница ω . Нека l_B и l_C се две прави низ точките B и C , соодветно, такви што $l_B \parallel l_C$. Вторите пресечни точки на l_B и l_C со ω се D и E , соодветно. Нека претпоставиме дека D и E се на иста страна од BC како и точката A . Нека DA ја сече l_C во F и нека EA ја сече l_B во G . Ако O, O_1 и O_2 се центрите на опишаните кружници околу триаголниците ABC, ADG и AEF , соодветно, и P е центарот на опишаната кружница околу триаголникот OO_1O_2 , докажи дека $l_B \parallel OP \parallel l_C$.

4. Нека u е позитивен рационален број и m е природен број. Дефинираме низа $q_1, q_2, q_3, \dots$ таква што $q_1 = u$ и за секој $n \geq 2$:

$$\text{ако } q_{n-1} = \frac{a}{b}, \text{ каде } a \text{ и } b \text{ се заемно прости броеви, тогаш } q_n = \frac{a+mb}{b+1}.$$

Определи ги сите природни броеви m такви што низата $q_1, q_2, q_3, \dots$ е скоро периодична за секој позитивен рационален број u .

Забелешка. Низата $x_1, x_2, x_3, \dots$ е скоро периодична ако постојат природни броеви c и t такви што $x_n = x_{n+t}$ за секој $n \geq c$.

Време за работа 240 минути.

Секоја задача се вреднува со 10 бода.

Користењето на калкулатори и други слични уреди не е дозволено.



8th European Mathematical Cup

14th December 2019

Senior Category



1. Определи ги сите парови природни броеви (m, n) такви што за секои два природни броја x и y такви што $x|m$ и $y|n$ важи

$$\text{NZD}(x+y, mn) > 1.$$

2. Нека n е природен број. За $n \times n$ табла, која содржи n^2 единечни полиња, секое од кои е обоено со црна или бела боја, ќе велиме дека е *конвексна* ако за секое црно обоено поле полето кое е непосредно лево од него (ако тоа постои) и полето кое е непосредно над него (ако тоа постои) се исто така обоени со црна боја. Дефинираме *убавина* на таблата како бројот парови од нејзини полиња (u, v) такви што u е црно, v е бело и u и v се во ист ред или иста колона на таблата. Определи ја максималната можна убавина на конвексна $n \times n$ табла.

3. Нека ABC ($\overline{AB} \neq \overline{AC}$) е остроаголен триаголник, I е центарот на впишаната и O е центарот на опишаната кружница околу $\triangle ABC$. Впишаната кружница во $\triangle ABC$ ги допира страните BC, CA и AB во точките D, E и F , соодветно. Докажи дека ако правата која минува низ I и е паралелна со EF , правата која минува низ D и е паралелна со AO и висината на $\triangle ABC$ повлечена од A се сечат во една точка, тогаш пресечната точка е ортоцентарот на $\triangle ABC$.

4. Определи ги сите функции $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ такви што

$$f(x) + f(yf(x) + f(y)) = f(x + 2f(y)) + xy$$

за секои $x, y \in \mathbb{R}$.

Време за работа 240 минути.

Секоја задача се вреднува со 10 бода.

Користењето на калкулатори и други слични уреди не е дозволено.