Ристо Малчески
Скопје

ЕНГЕЛОВ ПРИНЦИП НА МИНИМУМ

Во оваа статија ќе го разгледаме таканаречениот Енгелов принцип на минимум, кој всушност е само запис на неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц во друга форма.

Теорема 1 (Енгелов принцип на минимум). Нека $a_1, a_2, ..., a_n$ се реални броеви и $x_1, x_2, ..., x_n$ се ненегативни реални броеви. Тогаш

$$\frac{a_1^2}{x_1} + \frac{a_2^2}{x_2} + ... + \frac{a_n^2}{x_n} \geq \frac{(a_1+a_2+...+a_n)^2}{x_1+x_2+...+x_n}, \qquad (1)$$

при што знак за равенство важи ако и само ако

$$\frac{a_1}{x_1} = \frac{a_2}{x_2} = ... = \frac{a_n}{x_n}. \qquad (2)$$

Доказ. *Прв начин.* Од неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц непосредно следува неравенството

$$\begin{aligned}(a_1 + a_2 + ... + a_n)^2 &= (\frac{a_1}{\sqrt{x_1}}\sqrt{x_1} + \frac{a_2}{\sqrt{x_2}}\sqrt{x_2} + ... + \frac{a_n}{\sqrt{x_n}}\sqrt{x_n})^2 \\ &\leq (\frac{a_1^2}{x_1} + \frac{a_2^2}{x_2} + ... + \frac{a_n^2}{x_n})(x_1 + x_2 + ... + x_n),\end{aligned}$$

кое е еквивалентно со неравенството (1).

Јасно знак за равенство важи ако и само ако

$$\frac{a_1}{\sqrt{x_1}} : \sqrt{x_1} = \frac{a_2}{\sqrt{x_2}} : \sqrt{x_2} = ... = \frac{a_n}{\sqrt{x_n}} : \sqrt{x_n},$$

т.е. ако и само ако важи (2).

Втор начин. За $n = 2$ неравенството (1) има облик

$$\frac{a_1^2}{x_1} + \frac{a_2^2}{x_2} \geq \frac{(a_1+a_2)^2}{x_1+x_2},$$

и тоа е еквивалентно со неравенството

$$(a_1^2 x_2 + a_2^2 x_1)(x_1 + x_2) \geq (a_1 + a_2)^2 x_1 x_2,$$

т.е. со неравенството $(a_1 x_2 - a_2 x_1)^2 \geq 0$, кое очигледно е точно и притоа знак за равенство важи ако и само ако $\frac{a_1}{x_1} = \frac{a_2}{x_2}$.

Нека претпоставиме дека неравенството важи за $n = k$. Тогаш, за $n = k + 1$, од индуктивната претпоставка и претходно докажаното следува

$$\frac{a_1^2}{x_1}+\frac{a_2^2}{x_2}+\ldots+\frac{a_k^2}{x_k}+\frac{a_{k+1}^2}{x_{k+1}} \geq \frac{(a_1+a_2+\ldots+a_k)^2}{x_1+x_2+\ldots+x_k}+\frac{a_{k+1}^2}{x_{k+1}} \geq \frac{(a_1+a_2+\ldots+a_k+a_{k+1})^2}{x_1+x_2+\ldots+x_k+x_{k+1}},$$

па од принципот на математичка индукција следува дека тоа важи за секој $n \in \mathbf{N}$. ■

Задача 1. Докажи дека за секои позитивни реални броеви a, b, c, d е точно неравенството

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{4}{c}+\frac{16}{d} \geq \frac{64}{1+b+c+d}.$$

Решение. Користејќи го Енгеловиот принцип на минимум, т.е. неравенството (1), добиваме

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{4}{c}+\frac{16}{d}=\frac{1^2}{a}+\frac{1^2}{b}+\frac{2^2}{c}+\frac{4^2}{d} \geq \frac{(1+1+2+4)^2}{a+b+c+d}=\frac{64}{1+b+c+d}. \;■$$

Задача 2. Ако $a_i,\, b_i > 0$, за $i=1,2,\ldots,n$ се такви што $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i = \sum\limits_{i=1}^{n} b_i$, докажи дека

$$\frac{a_1^2}{a_1+b_1}+\frac{a_2^2}{a_2+b_2}+\ldots+\frac{a_n^2}{a_n+b_n} \geq \frac{1}{2}(a_1+a_2+\ldots+a_n).$$

Решение. Од Енгеловиот принцип на минимум и условот на задачата следува

$$\frac{a_1^2}{a_1+b_1}+\frac{a_2^2}{a_2+b_2}+\ldots+\frac{a_n^2}{a_n+b_n} \geq \frac{(a_1+a_2+\ldots+a_n)^2}{a_1+b_1+a_2+b_2+\ldots+a_n+b_n}=\frac{(a_1+a_2+\ldots+a_n)^2}{2(a_1+a_2+\ldots+a_n)}$$
$$=\frac{1}{2}(a_1+a_2+\ldots+a_n),$$

што и требаше да се докаже. ■

Задача 3. Ако позитивните броеви x, y и z го задоволуваат условот $xyz=1$, докажи го неравенството

$$\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{z+x}+\frac{z^2}{x+y} \geq \frac{3}{2}.$$

Решение. Со примена на Енгеловиот принцип на минимум имаме

$$\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{z+x}+\frac{z^2}{x+y} \geq \frac{(x+y+z)^2}{2(x+y+z)}=\frac{x+y+z}{2}.$$

Ако пак го примениме неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина и го користиме условот $xyz=1$, добиваме

$$\frac{x+y+z}{2} \geq \frac{3}{2}\sqrt[3]{xyz}=\frac{3}{2}. \;■$$

Забелешка 1. а) Непосредна последица од теорема 1 е неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц. Имено, ако $a_i,\ b_i \in \mathbf{R}$, за $i=1,2,...,n$, тогаш од неравенството (1) следува неравенството

$$\begin{aligned} a_1^2+a_2^2+...+a_n^2 &= \frac{a_1^2b_1^2}{b_1^2}+\frac{a_2^2b_2^2}{b_2^2}+...+\frac{a_n^2b_n^2}{b_n^2} \\ &= \frac{(a_1b_1)^2}{b_1^2}+\frac{(a_2b_2)^2}{b_2^2}+...+\frac{(a_nb_n)^2}{b_n^2} \\ &\geq \frac{(a_1b_1+a_2b_2+...+a_nb_n)^2}{b_1^2+b_2^2+...+b_n^2}, \end{aligned}$$

кое е еквивалентно со неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц.

б) Непосредна последица од теорема 1 е неравенството меѓу аритметичката и квадратната средина. Навистина, ако $a_i>0$, за $i=1,2,...,n$, тогаш од (1) следува неравенството

$$\frac{a_1^2}{n}+\frac{a_2^2}{n}+...+\frac{a_n^2}{n} \geq \frac{(a_1+a_2+...+a_n)^2}{n+n+...+n} = \left(\frac{a_1+a_2+...+a_n}{n}\right)^2,$$

кое е еквивалентно со неравенството меѓу аритметичката и квадратната средина.

Задача 4. Нека a,b се позитивни реални броеви. Докажи дека

$$8(a^4+b^4) \geq (a+b)^4.$$

Решение. За $n=2$, прво од Енгеловиот принцип на минимум, а потоа од неравенството меѓу аритметичката и квадратната средина следува

$$a^4+b^4 = \frac{a^4}{1}+\frac{b^4}{1} \geq \frac{(a^2+b^2)^2}{2} \geq \frac{[\frac{(a+b)^2}{2}]^2}{2} = \frac{(a+b)^4}{8}. \ \blacksquare$$

Задача 5. Докажи, дека ако позитивните реални броеви a, b и c го задоволуваат условот $a+b+c=1$, тогаш точно е неравенството

$$\frac{1}{1-a}+\frac{1}{1-b}+\frac{1}{1-c} \geq \frac{2}{1+a}+\frac{2}{1+b}+\frac{2}{1+c}.$$

Решение. Прво да забележиме дека од условот на задачата следува

$$\frac{1}{1-a}+\frac{1}{1-b}+\frac{1}{1-c} = \frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}.$$

Сега од Енгеловиот принцип на миниму следува $\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c} \geq \frac{4}{a+2b+c} = \frac{4}{1+b}$ и аналогно $\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a} \geq \frac{4}{1+c}$ и $\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b} \geq \frac{4}{1+a}$. Ако ги собереме последните три неравенства добиваме дека $2(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}) \geq \frac{4}{1+a}+\frac{4}{1+b}+\frac{4}{1+c}$, од каде директно следува бараното неравенство. ■

Задача 6. Докажи дека

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+d}+\frac{c}{d+a}+\frac{d}{a+b}\geq 2,$$ каде a, b, c и d се позитивни броеви.

Решение. Од Енгеловиот принцип на минимум следува

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+d}+\frac{c}{d+a}+\frac{d}{a+b}=\frac{a^2}{a(b+c)}+\frac{b^2}{b(c+d)}+\frac{c^2}{c(d+a)}+\frac{d^2}{d(a+b)}\geq\frac{(a+b+c+d)^2}{2ac+2bd+ab+bc+cd+da}$$

Од друга страна

$$(a+b+c+d)^2=a^2+b^2+c^2+d^2+2(ab+ac+ad+bc+bd+cd)$$

па значи

$$(a+b+c+d)^2-2(2ac+2bd+ab+bc+cd+da)=a^2+b^2+c^2+d^2-2ac-2bd$$

$$=(a-c)^2+(b-d)^2\geq 0,$$

од каде следува бараното неравенство. ■

Задача 7. Нека x,y,z се позитивни реални броеви. Докажи дека

$$\frac{2}{x+y}+\frac{2}{y+z}+\frac{2}{z+x}\geq\frac{9}{x+y+z}.$$

Решение. Од Енгеловиот принцип на минимум непосредно следува

$$\frac{2}{x+y}+\frac{2}{y+z}+\frac{2}{z+x}=\frac{\sqrt{2}^2}{x+y}+\frac{\sqrt{2}^2}{y+z}+\frac{\sqrt{2}^2}{z+x}\geq\frac{(\sqrt{2}+\sqrt{2}+\sqrt{2})^2}{x+y+y+z+z+x}=\frac{9}{x+y+z}.$$ ■

Задача 8. Нека x,y,z се позитивни реални броеви. Докажи дека

$$\frac{x^2+y^2}{x+y}+\frac{y^2+z^2}{y+z}+\frac{z^2+x^2}{z+x}\geq x+y+z.$$

Решение. Од Енгеловиот принцип на минимум следува

$$\frac{x^2+y^2}{x+y}+\frac{y^2+z^2}{y+z}+\frac{z^2+x^2}{z+x}=\left(\frac{x^2}{x+y}+\frac{y^2}{y+z}+\frac{z^2}{z+x}\right)+\frac{y^2}{x+y}+\frac{z^2}{y+z}+\frac{x^2}{z+x}$$

$$\geq\frac{(x+y+z)^2}{2(x+y+z)}+\frac{(x+y+z)^2}{2(x+y+z)}$$

$$=x+y+z.$$ ■

Задача 9. Докажи дека за секои $a,b,c\in\mathbf{R}$ е точно неравенството

$$(a+b+c)^2\geq 3(ab+bc+ca).$$

Решение. Од очигледното неравенство $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\geq 0$ после квадрирање и средување го добиваме неравенството

$$a^2+b^2+c^2\geq ab+bc+ca.$$

Ако на последното неравенство од двете страни додадеме $2ab+2bc+2ca$, после средувањето го добиваме бараното неравенство. ■

Последица 1 (неравенство на Несбит). Ако $a,b,c>0$, тогаш

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{3}{2}.$$

Доказ. Од Енгеловиот принцип на минимум и од задача 9 непосредно следува

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}=\frac{a^2}{a(b+c)}+\frac{b^2}{b(c+a)}+\frac{c^2}{c(a+b)}$$

$$\geq\frac{(a+b+c)^2}{2(ab+bc+ca)}\geq\frac{3(ab+bc+ca)}{2(ab+bc+ca)}=\frac{3}{2}.\ \blacksquare$$

Задача 10. Нека $a,b,c\in\mathbf{R}^+$ се такви што $abc=1$. Докажи дека

$$\frac{1}{ab+b}+\frac{1}{bc+c}+\frac{1}{ca+a}\geq\frac{3}{2}.$$

Решение. Земаме $a=\frac{x}{y}, b=\frac{y}{z}, c=\frac{z}{x}$ и добиваме дека даденото неравенство е еквивалентно на неравенството на Несбит $\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y}\geq\frac{3}{2}$. ■

Задача 11. Нека $a,b,c\in\mathbf{R}^+$ се такви што такви што $abc=1$. Докажи дека

$$\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(a+c)}+\frac{1}{c^3(a+b)}\geq\frac{3}{2}.$$

Решение. Со примена, прво на Енгеловиот принцип на минимум, а потоа на неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина и условот на задачата, добиваме

$$\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(c+a)}+\frac{1}{c^3(a+b)}=\frac{\frac{1}{a^2}}{a(b+c)}+\frac{\frac{1}{b^2}}{b(c+a)}+\frac{\frac{1}{c^2}}{c(a+b)}\geq\frac{(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c})^2}{2(ab+bc+ca)}$$

$$=\frac{ab+bc+ca}{2abc}\geq\frac{3\sqrt[3]{(abc)^2}}{2abc}=\frac{3}{2}.\ \blacksquare$$

Задача 12. Нека a, b и c се позитивни броеви такви да $a+b+c\leq 3$. Докажи дека

$$\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}+\frac{1}{1+c}\geq\frac{3}{2}.$$

Решение. Од Енгеловиот принцип на минимум следува, дека

$$\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}+\frac{1}{1+c}\geq\frac{3^2}{3+a+b+c}.$$

Од друга страна, од условот на задачата добиваме $a+b+c+3\leq 6$ и значи $\frac{1}{3+a+b+c}\geq\frac{1}{6}$ од каде добиваме $\frac{3^2}{3+a+b+c}\geq\frac{9}{6}=\frac{3}{2}$. ■

Задача 13. За позитивните броеви x и y да се докаже неравенството:

$$\frac{1}{\sqrt[4]{x}}+\frac{1}{\sqrt[4]{y}}\geq\frac{2^{\frac{5}{4}}}{\sqrt[4]{x+y}}.$$

Решение. Од Енгеловиот принципи на минимум добиваме

$$\frac{1}{\sqrt[4]{x}}+\frac{1}{\sqrt[4]{y}}\geq\frac{2^2}{\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}}.$$

Понатаму од неравенството меѓу аритметичката и квадратната средина наоѓаме

$$\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}\leq 2\sqrt{\frac{\sqrt[4]{x^2}+\sqrt[4]{y^2}}{2}}=2^{\frac{1}{2}}\sqrt{\sqrt{x}+\sqrt{y}} \text{ и } \sqrt{x}+\sqrt{y}\leq 2\sqrt{\frac{x+y}{2}}=2^{\frac{1}{2}}\sqrt{x+y},$$

па затоа

$$\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}\leq 2^{\frac{1}{2}}.\sqrt[4]{2}.\sqrt[4]{x+y}=2^{\frac{3}{4}}.\sqrt[4]{x+y}, \text{ т.е. } \frac{1}{\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}}\geq\frac{1}{2^{\frac{3}{4}}.\sqrt[4]{x+y}}.$$

Конечно,

$$\frac{1}{\sqrt[4]{x}}+\frac{1}{\sqrt[4]{y}}\geq\frac{2^2}{\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}}\geq\frac{2^2}{2^{\frac{3}{4}}.\sqrt[4]{x+y}}=\frac{2^{\frac{5}{4}}}{\sqrt[4]{x+y}}.\ \blacksquare$$

Задача 14. Ако $a,b,c\in\mathbf{R}^+$ се такви што $a^2+b^2+c^2=1$, докажи дека

$$\frac{a}{b^2+1}+\frac{b}{c^2+1}+\frac{c}{a^2+1}\geq\frac{3}{4}(a\sqrt{a}+b\sqrt{b}+c\sqrt{c})^2.$$

Решение. Имаме

$$\frac{a}{b^2+1}+\frac{b}{c^2+1}+\frac{c}{a^2+1}=\frac{a^3}{a^2b^2+a^2}+\frac{b^3}{b^2c^2+b^2}+\frac{c^3}{c^2a^2+c^2}=\frac{(a\sqrt{a})^2}{a^2b^2+a^2}+\frac{(b\sqrt{b})^2}{b^2c^2+b^2}+\frac{(c\sqrt{c})^2}{c^2a^2+c^2}.$$

Со примена на Енгеловиот принцип на минимум добиваме

$$\frac{a}{b^2+1}+\frac{b}{c^2+1}+\frac{c}{a^2+1}\geq\frac{(a\sqrt{a}+b\sqrt{b}+c\sqrt{c})^2}{a^2b^2+a^2+b^2c^2+b^2+c^2a^2+c^2}=\frac{(a\sqrt{a}+b\sqrt{b}+c\sqrt{c})^2}{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+1}.$$

Сега од неравенството

$$1=(a^2+b^2+c^2)^2\geq 3(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)$$

следува, дека

$$a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+1\leq\frac{1}{3}+1=\frac{4}{3}, \text{ т.е. } \frac{1}{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+1}\geq\frac{3}{4}.$$

Затоа,

$$\frac{a}{b^2+1}+\frac{b}{c^2+1}+\frac{c}{a^2+1}\geq\frac{(a\sqrt{a}+b\sqrt{b}+c\sqrt{c})^2}{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+1}\geq\frac{3}{4}(a\sqrt{a}+b\sqrt{b}+c\sqrt{c})^2.\ \blacksquare$$