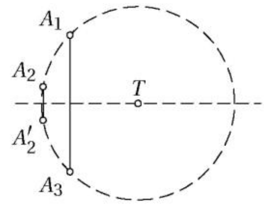
XL олимпијада

1. Определи ги сите конечни множества точки во рамнината S кои содржат барем три точки и кои го задоволуваат следниов услов: за секои две различни точки A и B од S, симетралата на отсечката AB е оска на симетрија на множеството S.

Решение. За произволни различни точки $A, B \in S$, симетријата во однос на симетралата s_{AB} на отсечката AB го пресликува множеството S во себе, па така го пресликува и тежиштето T на множеството S во себе. Значи, $T \in s_{AB}$, т.е. $\overline{TA} = \overline{TB}$. Последното значи дека целото множество S припаѓа на кружница со центар T.



Нека точките на множеството S определуваат конвексен многуаголник $A_1A_2...A_n$. Точката A_2' симетрична на точката A_2 во однос на $S_{A_1A_3}$ припаѓа на лакот $A_1A_2A_3$ и припаѓа на множеството S, па затоа мора да важи $A_2' \equiv A_2$. Оттука следува дека $\overline{A_1A_2} = \overline{A_2A_3}$. Аналогно следува дека $\overline{A_2A_3} = \overline{A_3A_4} = ... = \overline{A_nA_1}$, т.е. $A_1, A_2, ..., A_n$ се темиња на правилен $n-$аголник. Јасно е дека сите такви множества ги задоволуваат условите на задачата.

2. Нека $n \geq 2$ е природен број.

а) Определи ја најмалата константа C така да неравенството

$$\sum_{1\leq i<j\leq n} x_i x_j (x_i^2 + x_j^2) \leq C(\sum_{i=1}^{n} x_i)^4 \qquad (1)$$

важи за секои реални броеви $x_1, x_2, ..., x_n \geq 0$.

б) За најдената константа C определи кога важи знак за равенство.

Решение. *Прв начин.* Ако не се сите броеви x_i еднакви на нула (во спротивно неравенството е тривијално), заради хомогеноста можеме да сметаме дека $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$. Левата страна на неравенството го добива обликот

$$F(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{1\leq i<j\leq n} x_i x_j (x_i^2 + x_j^2) = \sum_i x_i^3 \sum_{j\neq i} x_j = \sum_i x_i^3 (1 - x_i) = \sum_i f(x_i),$$

каде $f(x) = x^3 - x^4$.

Бидејќи

$$f(x+y) + f(0) - f(x) - f(y) = 3xy(x+y)(\tfrac{2}{3} - x - y)$$

вредноста на F расте ако два позитивни броја x и y такви што $x+y\le\frac{2}{3}$ се заменат со броевите 0 и $x+y$. Оваа операција секогаш може да се реализира ако меѓу броевите x_i има најмалку три различни од нула. Така со нејзино повеќекратно применување добиваме

$$F(x_1,x_2,...,x_n)\le F(a,1-a,0,...,0)=\tfrac{1}{2}(2a(1-a))(1-2a(1-a))\le\tfrac{1}{8},$$

при што знак за равенство важи ако и само ако $a=\frac{1}{2}$. Според тоа, $C=\frac{1}{8}$ за секој n, при што знак за равенство важи ако и само ако два броја x_i се еднакви, а останатите се нули.

Втор начин. Да означиме $M=x_1^2+x_2^2+...+x_n^2$. Користејќи го неравенството

$$ab\le\tfrac{1}{8}(a+2b)^2$$

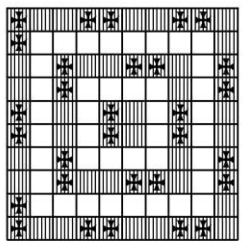
добиваме

$$\sum_{1\le i<j\le n}x_ix_j(x_i^2+x_j^2)\le M\sum_{1\le i<j\le n}x_ix_j\le\tfrac{1}{8}(M+2\sum_{1\le i<j\le n}x_ix_j)^2=\tfrac{1}{8}(\sum_{i=1}^{n}x_i)^4,$$

при што знак за равенство важи ако и само ако

$$M=2\sum_{1\le i<j\le n}x_ix_j \text{ и } x_ix_j(x_i^2+x_j^2)=Mx_ix_j, \text{ за секои } i<j.$$

3. Дадена е квадратна табла со димензија $n\times n$, каде n е парен број. Таблата е поделена на n^2 единечни квадрати. Два различни единечни квадрати на таблата се соседни ако имаат заедничка страна.
Означени се N единечни квадрати така што секој единечен квадрат (означен или неозначен) е соседен со барем еден означен квадрат.
Определи ја најмалата можна вредност на бројот N.



Решение. Нека $n=2k$. Множеството квадратни полиња чии центри се на растојание $i-\frac{1}{2}$ од најблиската страна на квадратот ($i=1,2,...,k$) го нарекуваме $i-$та рамка. Полињата на $i-$тата рамка ги боиме во црно за непарно i, а во бело за парно i. Сега секое поле на таблата (обоено во било која боја) е соседно со точно две црни полиња. Бидејќи имаме $2k(k+1)$ црни полиња, мораме да означиме најмалку $k(k+1)$ поле. Останува да докажеме дека овој број може да се достигне. Во секоја црна рамка да го означиме полето во долниот лев агол и полето непосредно над него, а потоа одејќи долж оваа рамка во насока на движењето на стрелката на часовникот, наизменично прескокнуваме и означуваме по две полиња. Лесно се гледа дека секое поле има точно по едно означено соседно поле, а се означени $2(2k-1)+2(2k-5)+2(2k-9)+...=k(k+1)$ полиња.

Според тоа, одговорот на задачата е $k(k+1)$.

Забелешка. На сличен начин може да се решат случаите кога $n=4k-1$ и $n=4k+1$. Во општи случај одговорот е $(2[\frac{n}{4}]+1)(n-2[\frac{n}{4}])$.

4. Определи ги сите парови природни броеви (n,p) такви што
   1) p е прост број,
   2) $n \le 2p$ и
   3) $n^{p-1} \mid (p-1)^n+1$.

Решение. Единствени решенија за $n<3$ или $p<3$ се $(2,2)$ и $(1,p)$ за произволен прост број p. Понатаму, ќе сметаме дека p, а со само тоа и n непарен број.

Нека q е најмалиот прост делител на бројот n. Од $q \mid (p-1)^n+1 \mid (p-1)^{2n}-1$ следува дека редот k на бројот $p-1$ по модул q е делител на $2n$. Од друга страна, знаеме дека $k \mid q-1$, па затоа $k \mid \mathrm{NZD}(2n,q-1)=2$. Според тоа, $q \mid (p-1)^2-1=p(p-2)$. Притоа не е можно $q \mid p-2$, бидејќи тогаш

$$(p-1)^n+1 \equiv 2 (\mathrm{mod}\, q).$$

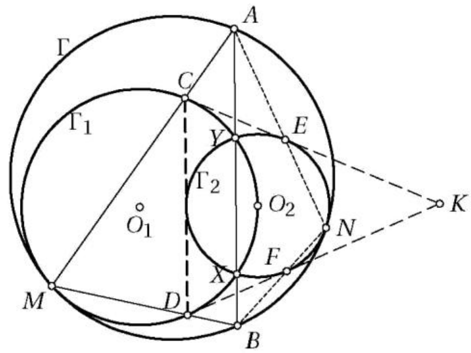
Значи, $q=p$ и бидејќи $n<2p$ заклучуваме дека $n=p$. Сега, од 3) следува дека

$$p^{p-1} \mid (p-1)^p+1 = p^p-\binom{p}{1}p^{p-1}+\binom{p}{2}p^{p-2}-...-\binom{p}{p-2}p^2+\binom{p}{p-1}p. \quad (1)$$

Меѓутоа, на десната страна во (1) сите собирци освен последниот се деливи со p^3, па затоа $p^3 \nmid (p-1)^p+1$. Затоа $p=3$. Навистина, парот $(n,p)=3,3)$ ги задоволува условите на задачата.

5. Кружниците Γ_1 и Γ_2 се наоѓаат во внатрешноста на кружницата Γ и ја допираат Γ во различни точки M и N, соодветно. Кружницата Γ_1 минува низ центарот на кружницата Γ_2. Правата која минува низ пресечните точки на кружниците Γ_1 и Γ_2 ја сече кружницата Γ во точките A и B. Правите MA и MB ја сечат Γ_1 во тоќките C и D, соодветно. Докажи, дека правата CD е тангента на кружницата Γ_2.

Решение. *Прв начин*. Нека кружниците Γ_1 и Γ_2 се сечат во точките X и Y, а правите NA и NB ги сечат кружниците Γ_1 и Γ_2 во точките E и F, соодветно (види цреж). При хомотетија со центар M која Γ_1 ја пресликува во Γ точките C и D се пресликуваат во точките A и B соодветно, па затоа



$CD \parallel AB$. Од

$$\overline{AC} \cdot \overline{AM} = \overline{AX} \cdot \overline{AY} = \overline{AE} \cdot \overline{AN}$$

следува дека точките C, E, M, N лежат на една кружница, па затоа

$$\angle ACE = \angle ANM = \angle ABM = \angle CDM.$$

Оттука следува дека правата CE е тангента на кружницата Γ_1. Аналогно CE е тангента на Γ_2, а правата DF е тангента на кружниците Γ_1 и Γ_2.

Со K да ја означиме пресечната точка на правите CE и DF, а со O_1 и O_2 центрите на кружниците Γ_1 и Γ_2. Точката O_1 е средина на помалиот лак CD на кружницата опишана околу триаголникот CDK. Бидејќи точката O_2 припаѓа на симетралата на $\angle CDK$ и $\overline{O_1C} = \overline{O_1D} = \overline{O_1O_2}$, добиваме дека O_2 е центар на впишаната кружница во триаголникот CDK (т.е. Γ_2 е впишаната кружница) или центар на припишаната кружница наспроти темето K. Во двата случаја Γ_2 ја допира правата CD.

Втор начин. Со r_1, r_2, r да ги означиме радиусте на кружниците Γ_1 Γ_2, Γ, соодветно. Треба да докажеме дека растојанието $d(O_2, CD)$ од точката O_2 до правата CD е еднакво на r_2.

Хомотетијата со центар M и коефициент $\frac{r}{r_1}$ ги пресликува Γ_1, C, D во Γ, A, B соодветно, па затоа $CD \parallel AB$ и

$$d(C, AB) = \tfrac{r-r_1}{r} d(M, AB).$$

Ако R е пресечната точка на правите O_1O_2 и XY, тогаш

$$d(O_2, CD) = \overline{O_2R} + \tfrac{r-r_1}{r} d(M, AB),$$

т.е.

$$d(O_2, CD) = \overline{O_2R} + \tfrac{r-r_1}{r} (\overline{O_1O_2} - \overline{O_2R} + r_1 \cos\measuredangle OO_1O_2), \qquad (1)$$

бидејќи точките O, O_1 и M се колинеарни. Понатаму,

$$\overline{O_1X} = \overline{O_1O_2} = r_1, \overline{OO_1} = r - r_1, \ \ \overline{OO_2} = r - r_2 \text{ и } \overline{O_2X} = r_2,$$

па од косинусната теорема за триаголниците OO_1O_2 и XO_1O_2 следува

$$\cos\measuredangle OO_1O_2 = \tfrac{2r_1^2 - 2rr_1 + 2rr_2 - r_2^2}{2r_1(r-r_1)} \text{ и } \overline{O_2R} = \tfrac{r_2^2}{2r_1},$$

па од (1) следува $d(O_2, CD) = r_2$.

6. Определи ги сите функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такви што

$$f(x - f(y)) = f(f(y)) + xf(y) + f(x) - 1,$$

за секои $x, y \in \mathbb{R}$.

Решение. Нека $f(0) = c$. За $x = y = 0$ добиваме $f(-c) = f(c) + c - 1$, па затоа $c \neq 0$. Да го разгледаме множеството $A = \{f(x) \mid x \in \mathbb{R}\}$. Ако во почетната равенка ставиме $x = f(y)$ добиваме $f(x) = \frac{c+1}{2} - \frac{x^2}{2}$, за секој $x \in A$. Уште повеќе, за $u, v \in A$ имаме

$$f(u - v) = f(u) + uv + f(v) - 1 = c - \frac{u^2 + v^2}{2} + uv = c - \frac{(u-v)^2}{2} .$$

Останува да забележиме дека за секој $x \in \mathbb{R}$ постојат $u, v \in A$ такви што $u - v = x$. Навистина, почетната равенка за $y = 0$ дава

$$f(x - c) - f(x) = cx + f(c) - 1,$$

и вредностите на десната страна на последното равенство се сите реални броеви.

Според тоа, $f(x) = 1 - \frac{x^2}{2}$, за секој $x \in \mathbb{R}$. Непосредно се проверува дека последната функција ги задоволува условите на задачата.