25. ТУРНИР ГРАДОВА

Јесење коло.

Припремна варијанта, 19. октобар 2003. год.

8-9. разред (млађи узраст)

(Резултат се рачуна на основу три задатка на којима је добијено највише поена)

---

1. (3 поена) Свака страна кутије облика паралелопипеда са ивицама 3, 4, 5 подељена је на јединична квадратиће. Може ли се у сваки квадратић уписати број тако да збир бројева у сваком прстену ширине 1, описаном око те кутије, буде 120?

2. (4 поена) У седмоуглу $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7$ дијагонале A_1A_3, A_2A_4,A_3A_5, A_4A_6, A_5A_7,-A_6A_1 и A_7A_2 једнаке су међу собом. Дијагонале A_1A_4, A_2A_5,A_3A_6,A_4A_7,A_5A_1,A_6A_2 и A_7A_3 такође су међусобно једнаке. Мора ли тај седмоугао бити правилан?

3. (4 поена) За сваки цео број од $n+1$ до $2n$ укључујући и $2n$ (где је n природан број) је одабран његов највећи непаран делилац и сви ти делиоци су сабрани. Доказати да је тај збир једнак n^2.

4. (4 поена) N тачака у равни, од којих никоје три не леже на једној правој, су међусобно спојене дужима (свака са сваком). Неке дужи су обојене црвеном, а остале плавом бојом. Црвене дужи чине затворену изломљену линију без самопресецања, као и плаве. Наћи све N за које је то могуће.

5. (5 поена) На траци 1•N на првих 25 поља (с лева) стоји 25 жетона. Жетон се може померити на суседно слободно десно поље или прескочити суседни жетон са десне стране на следеће поље (уколико је оно празно), померање у лево није дозвољено. За које најмање N је могуће све жетоне поређати без размака у обрнутом поретку?

25. ТУРНИР ГРАДОВА

Јесење коло.

Припремна варијанта, 19. октобар 2003. год.

10-11 разред (старији узраст)

(Резултат се рачуна на основу три задатка на којима је добијено највише поена)

---

1. (3 поена) За сваки цео број од $n+1$ до $2n$ укључујући и $2n$ (где је n природан број) је одабран његов највећи непаран делилац и сви ти делиоци су сабрани. Доказати да је тај збир једнак n^2.

2. (4 поена) Који је најмањи број квадрата 1×1 које треба нацртати да би се добила слика квадрата величине 25×25 подељеног на 625 квадрата 1×1?

3. (5 поена) Продавац и купац имају укупно 1999 рубаља у апоенима од 1, 5, 10, 50, 100, 500 и 1000 рубаља. Мачка у џаку кошта целобројан број рубаља и купац има довољно новца да је купи. Доказати да купац може купити мачку и добити тачан износ кусура.

4. Четири правоугла троугла су конструисана ван јединичног квадрата тако да су нихове хипотенузе четири странице квадрата. Нека су A, B, C, D темена тих троуглова наспрам хипотенуза и нека су O_1, O_2, O_3, O_4 центри уписаних кругова у те троуглове. Доказати да:

(3 поена) а) површина четвороугла ABCD није већа од 2.

(3 поена) б) површина четвороугла $O_1O_2O_3O_4$ није већа од 1.

5. (6 поена) Папирни тетраедар је расечен дуж неких својих ивица тако да се може развити у раван. Да ли се може десити да се тај развој у раван не може остварити без преклапања (то јест, у једном слоју)?

25. ТУРНИР ГРАДОВА

Јесење коло.

Основна варијанта. 26. октобар 2003. год.

6-7. разред (млађи узраст)

(Резултат се рачуна на основу три задатка на којима је добијено највише поена)

---

1. (4 поена) Сто целих позитивних бројева образује растућу аритметичку прогресију. Могу ли било која два од тих бројева бити узајамно прости?

2. (5 поена) У групи младића и девојака неки се међусобно познају, а неки не. Две проводаџике знају ко кога познаје. Једна проводаџика је изјавила:"Ја могу истовремено оженити све плавокосе момке тако да се сваки од њих ожени девојком коју познаје." Друга проводаџика каже:" А ја могу да удесим судбину свих плавуша: свака ће се удати за познатог јој момка!" Тај дијалог је слушао један љубитељ математике, па је казао:
"У том случају могуће је учинити и једно и друго!". Да ли је он у праву?

3. (5 поена) Нађите све целе позитивне бројеве k, за које се могу наћи такви цели позитивни бројеви m и n да је $m(m+k)=n(n+1)$.

4. (6 поена) Који је најмањи број поља које треба означити на табли 15×15, тако да ловац (шаховски), постављен на било које поље, туче не мање од два означена поља? (Ловац туче по две дијагонале на чијем пресеку стоји; ловац, постављен на једно означено поље, туче и то поље.)

5. (7 поена) Дат је квадрат ABCD. Унутар квадрата лежи тачка O. Докажите да се збир углова OAB, OBC, OCD и ODA разликује од 180^0 за не више од 45^0.

6. (7 поена) По површини (спољашњости) једне кутије (облика правоуглог пралелопипеда) мили мрав. У почетку он стоји на једном врху (темену) паралелопипеда. Да ли је истина да се међу свим тачкама на површини кутије које су на највећем растојању од мрава, налази теме наспрамног угла? (Растојање међу тачкама, према схватању мрава, представља дужину најкраћег пута међу тим тачкама, идући по површини паралелопипеда.)

7. (8 поена) Играју двоје. Први има 1000 парних картица (2,4, ..., 2000), а други 1001 непарну (1,3, ..., 2001). Потезе вуку наизменично. Почиње први играч. Потез се састоји у следећем: играч који је на потезу извлачи и показује једну од својих картица, а други играч, пошто погледа ту картицу, извлачи и показује једну од својих картица; онај играч чији је број на картици већи записује себи један поен, а обе показане картице се одлажу на страну. Игра се 1000 потеза (и једна картица другог играча остаје неискоришћена). Који највећи број поена може гарантовати себи сваки играч (ма како играо његов супарник)?

25. ТУРНИР ГРАДОВА

Јесење коло.

Основна варијанта. 26. октобар 2003. год.

10-11. разред (старији узраст)

(Резултат се рачуна на основу три задатка на којима је добијено највише поена)

---

1. (4 поена) У групи младића и девојака неки се међусобно познају, а неки не. Две проводаџике знају ко кога познаје. Једна проводаџика је изјавила:"Ја могу истовремено оженити све плавокосе момке тако да се сваки од њих ожени девојком коју познаје." Друга проводаџика каже:" А ја могу да удесим судбину свих плавуша: свака ће се удати за познатог јој момка!" Тај дијалог је слушао један љубитељ математике, па је казао:
"У том случају могуће је учинити и једно и друго!". Да ли је он у праву?

2. (4 поена) Докажите да се сваки позитиван број може представити у облику:

$$3^{u_1}\cdot 2^{v_1} + 3^{u_2}\cdot 2^{v_2} + \ldots + 3^{u_k}\cdot 2^{v_k},$$

где су $u_1>u_2>\ldots u_k\geq 0$ и $0\leq v_1<v_2<\ldots<v_k$ цели бројеви.

3. (6 поена) По површини (спољашњости) једне кутије (облика правоуглог пралелопипеда) мили мрав. У почетку он стоји на једном врху (темену) паралелопипеда. Да ли је истина да се међу свим тачкама на површини кутије које су на највећем растојању од мрава, налази теме наспрамног угла? (Растојање међу тачкама, према схватању мрава, представља дужину најкраћег пута међу тим тачкама, идући по површини паралелопипеда.)

4. (7 поена) Дат је троугао ABC. У њему је тачка H пресек висина, I центар уписане кружнице, O центар описане кружнице, K тачка пресека тетиве уписане кружнице са страницом BC. Зна се да су одсечци IO и BC паралелни. Докажи да су и одсечци AO и HK паралелни.

5. (7 поена) Играју двоје. Први има 1000 парних картица (2, 4, ..., 2000), а други 1001 непарну (1, 3, ..., 2001). Потезе вуку наизменично. Почиње први играч. Потез се састоји у следећем: играч који је на потезу извлачи и показује једну од својих картица, а други играч, пошто погледа ту картицу, извлачи и показује једну од својих картица; онај играч чији је број на картици већи записује себи један поен, а обе показане картице се одлажу на страну. Игра се 1000 потеза (и једна картица другог играча остаје неискоришћена). Који највећи број поена може гарантовати себи сваки играч (ма како играо његов супарник)?

25. ТУРНИР ГРАДОВА

Пролећно коло.

Припремна варијанта, 22. фебруар 2004. год.

8–9. разред (млађи узраст)

(Резултат се рачуна на основу три задатка на којима је добијено највише поена)

1. (3 поена). У троуглу ABC симетрала угла A, симетраала страницe AB и висина из темена B секу се у једној тачки. Докажите да се симетрала угла A, симетрала странице AC и висина из тачке C такође секу у једној тачки.

2. (3 поена). Нађи све природне бројеве n за које се могу наћи n узастопних природних бројева чији је збир прост број.

3. а) (3 поена). Имамо три једнаке велике посуде. У једној се налази $3l$ сирупа, у другом $20\ l$ воде, а трећа је празна. Дозвољено је сипати из једне посуде сву течност у другу посуду или, пак, просути сву течност (нпр. у лавабо). Такође је дозвољено одабрати две посуде и доливати у једну од њих течност из треће све док се нивои течности у одабраним посудама не изједначе. Како се може добити 10 литара 30-процентног сирупа?

б) (2 поена). Исто питање, али ако сада имамо N литара воде. За које целобројно N је могуће добити 10 литара 30-процентног сирупа?

4. (5 поена). Природном броју $a>1$ дописан (приписан) је исти тај број и добијен је број b који је дељив са a^2. Нађите $\frac{b}{a^2}$. (Пронађите све одговоре и докажите да других нема).

5. (6 поена). Два десетоцифрена броја зовемо "суседним" ако се они разликују само у једној цифри на некој декадној позицији. На пример, бројеви 1234567890 и 1234507890 су "суседни". Колико је највише могуће написати десетоцифрених бројева тако да међу њима нема ниједног пара "суседних" бројева?

25. ТУРНИР ГРАДОВА

Пролећно коло.

Припремна варијанта, 22. фабруар 2004. год.

10–11 разред (старији узраст)

(Резултат се рачуна на основу три задатка на којима је добијено највише поена)

1. (4 поена). *Дужи AB, BC и CD изломљене линије $ABCD$ су једнаке по дужини и додирују неку кружницу са центром O.* Докажите да тачка додира те кружнице са дужи BC, тачка O и тачка пресека правих AC и BD леже на једној правој.

2. (4 поена). Природном броју $a>1$ дописан (приписан) је исти тај број и добијен је број b који је дељив са a^2. Нађите $\frac{b}{a^2}$. (Наведите све одговоре и докажите да других нема).

3. (4 поена). Обим конвексног четвороугла је 2004, а једна од дијагонала је 1001. Може ли друга дијагонала бити једнака 1? Једнака 2? Једнака 1001?

4. (5 поена). Познато је да се међу члановима неке аритметичке прогресије $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots$ налазе бројеви a_1^2, a_2^2, a_3^2. Докажите да су чланови те прогресије цели бројеви.

5. (5 поена). Два десетоцифрена броја зовемо "суседним" ако се они разликују у само једној цифри на некој декадној позицији. На пример, бројеви 1234567890 и 1234507890 су "суседни". Колико је највише могуће написати десетоцифрених бројева тако да међу њима нема ниједног пара "суседних" бројева?

25. ТУРНИР ГРАДОВА

Пролећно коло.

Основна варијанта, 29. фебруар 2004. год.

8–9. разред (млађи узраст)

(Резултат се рачуна на основу три задатка на којима је добијено највише поена)

1. (4 поена). Коначан аритметички низ (прогресија) састоји се из целих бројева, а његова сума је степен двојке. Докажите да је број чланова тога низа такође степен двојке.

2. (5 поена). Колики максималан број жетона можемо поређати на табли 8×8 тако да сваки буде на удару? (Ако поља шаховске табле x, y, z стоје једно до другог на дијагонали, жетон a стоји на пољу x, жетон b на пољу y и поље z је слободно, тада је жетон b под ударом.)

3. (5 поена). Курс акција компаније "Рогови и копита" повећава се или пада сваки пут за n процената, где је n фиксирани цео број, $0<n<100$ (курс се рачуна са неограниченом тачношћу). Постоји ли такво n за које курс акција може два пута узети (имати) исту вредност?

4. (6 поена). Две кружнице секу се у тачкама A и B. Њихова заједничка тангента (она која је ближа тачки B) додирује кружнице у тачкама E и F. Права AB сече праву EF у тачки M. На продужетку AM иза тачке M изабрана је тачка K тако да је $KM=MA$. Права KE по други пут сече кружницу, којој припада тачка E, у тачки C. Права KF по други пут сече кружницу, којој припада тачка F, у тачки D. Докажите да тачке C, D и A леже на истој правој.

5. (6 поена). Имамо билијарски сто у облику многоугла (не мора бити конвексан) код кога су ма које две суседне странице нормалне једна на другу. У теменима се налазе тачкасте рупе у које лоптица, кад ту дође, пропада. Из темена A с унутрашњим углом 90^0 полази тачкаста лоптица и креће се унутар многоугла, одбијајући се од његових страница по закону "упадни угао једнак је углу одбијања". Доказати да се она никада неће вратити у тачку A.

6. (7 поена). У почетку је на табли написан број 2004! (2004 факторијел, то јест број $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 2004$). Два играча играју наизменично. Играч који је на реду ("на потезу") од написаног броја одузима неки природан број који је дељив са не више од 20 различитих простих бројева (али тако да разлика буде ненегативна), записује на табли ту разлику, а стари број брише. Побеђује онај играч који добије 0. Који од играча, онај који почиње или његов противник, може себи обезбедити победу и како он треба да игра?

25. ТУРНИР ГРАДОВА

Пролећно коло.
Основна варијанта, 29. фебруар 2004. године.
10–11 разред (старији узраст)

(Резултат се рачуна на основу три задатка на којима је добијено највише поена)

1. (4 поена). Курс акција компаније "Рогови и копита" повећава се или пада сваки пут за n процената, где је n фиксираани цео број, $0<n<100$ (курс се рачуна са неограниченом тачношћу). Постоји ли такво n за које курс акција може два пута узети (имати) исту вредност?

2. (6 поена). Имамо билијарски сто у облику многоугла (не мора бити конвексан) код кога сваки угао има цео број степени, а угао A има тачно 1 степен. У теменима се налазе тачкасте рупе у које лоптица, кад ту дође, пропада. Из темена A полази тачкаста лоптица и креће се унутар многоугла, одбијајући се од његових страница по закону "упадни угао једнак је углу одбијања". Доказати да се она никада неће вратити у тачку A.

3. (6 поена). Правоугаона пројекција тростране пирамиде на неку раван има максимално могућу површину.Докажите да је та раван паралелна или једној од страна пирамиде, или двема мимоилазним ивицама пирамиде.

4. (6 поена). У почетку је на табли написан број 2004! (2004 факторијел, то јест број $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 2004$). Два играча играју наизменично. Играч који је на реду ("на потезу") од написаног броја одузима неки природан број који је дељив са не више од 20 различитих простих бројева (али тако да разлика буде ненегативна), записује на табли ту разлику, а стари број брише. Побеђује онај играч који добије 0. Који од играча, онај који почиње или његов противник, може себи обезбедити победу и како он треба да игра?

5. (7 поена). У равни су дати парабола $y = x^2$ и кружница, тако да имају тачно две заједничке тачке: A и B. Показало се да се тангенте на кружницу и параболу у тачки A поклапају. Да ли ће се обавезно такође поклопити и тангенте на кружницу и параболу у тачки B?

6. Пред мађионичара се ставља шпил од 36 карата тако да им је полеђина горе. Он каже боју карте на врху (једну од четири: пик, каро, херц или треф), после чега се карта отвара, показује и ставља на страну. После тога мађионичар каже боју следеће карте, итд. Задатак мађионичара је да погоди боју што је могуће више пута. Стварно полеђине карата нису симетричне и играч види у ком од два положаја лежи карта на врху. Шпил је припремио подмићени (подплаћени) службеник. Службеник зна поредак карата у шпилу и, иако га не може променити, ипак може дошапнути (помоћи) мађионичару, намештајући полеђине карата овако или онако, сагласно договору. Може ли мађионичар, заахваљујући таквој помоћи, гарантовано обезбедити погађање боје:

а) (3 поена) код више од половине карата?

б) (5 поена) код не мање од 20 карата?

25-й Международный математический Турнир городов

2003/04 учебный год

Решения задач

Весенний тур

Тренировочный вариант, 8-9 классы

1.1. [3] В треугольнике ABC биссектриса угла A, серединный перпендикуляр к стороне AB и высота, опущенная из вершины B, пересекаются в одной точке. Доказать, что биссектриса угла A, серединный перпендикуляр к AC и высота, опущенная из C, также пересекаются в одной точке. (*П.Кожевников*)

Решение: Пусть BK – высота, M – середина AB. Из условия $AK = AM = {}^1/_2AB \Rightarrow \angle A = 60°$. Осталось обратить рассуждение со сменой обозначений.

1.2. [3] Найти все натуральные n, для которых найдутся n идущих подряд натуральных чисел, сумма которых простое число. (*Г.Гальперин*)

Решение: $n = 1, 2$. Например, $2 + 3 = 5$. Если $n > 2$, то при нечетном n указанная сумма делится на n, а при четном – на $a_1 + a_n$, причем в обоих случаяк частное больше 1.

1.3. В сосуде A – 3 л сиропа, в сосуде B – n л воды, сосуд C пуст. Разрешаются следующие операции (в любом количестве и порядке):

вылить **всю** жидкость из любого сосуда в раковину или другой сосуд;

перелить часть жидкости из одного сосуда во второй так, чтобы объемы жидкости во втором и третьем (не участвующем в операции) сосудах сравнялись.

Требуется получить 10 л разбавленного 30-процентного сиропа.

а) [3] Доказать, что это можно сделать при $n = 20$.

б) [2] Найти все целые n, при которых это возможно. (*А.Шаповалов*)

Решение:

а) Перельем из B в C 3 л воды и выльем ее (из C) в раковину; повторим эту операцию несколько раз, пока в B не останется 5 л воды, причем в последний раз перельем воду из C не в раковину , а в A. Теперь в A – 6 л 50% сиропа, а C снова пуст. Перельем 5 л из A в C. Теперь можно перелить 4 л воды из B в A, а оставшийся в B литр вылить в раковину. Осталось вернуть 5 л смеси из C в A, где образуется 10 л 30% сиропа.

б) Все некратные 3 числа, большие 6. Заметим, что указанный в а) алгоритм годится для всех $n \equiv 2 \pmod 3$. Если $n \equiv 1 \pmod 3$, то алгоритм еще проще: с помощью C выливаем из B по 3 л в раковину, пока в B не останется 7 л; после чего переливаем их в A.

Если же n кратно 3, то в начале объем жидкости в каждом сосуде кратен 3. Разрешенные операции не могут испортить это свойство, поэтому получить 10 л жидкости (независимо от ее состава) в одном сосуде невозможно.

1.4. [5] К натуральному числу $a > 1$ приписали это же число и получили число b, кратное a^2. Найти все возможные значения числа $\frac{b}{a^2}$. (*И.Богданов*)

Решение: Если число a n-значно, то $\frac{b}{a^2} = \frac{(10^n+1)a}{a^2} = \frac{10^n+1}{a}$. Ясно, что $a \neq 10^{n-1}$, значит, $1 < \frac{10^n+1}{a} < 10$. Число $10^n + 1$ (а тем более, частное) не делится ни на 2, ни на 3 (сумма цифр равна 2), ни на 5, поэтому единственное возможное частное – 7. Такое частное можно получить, например, при $a = 143 = \frac{1001}{7}$.

1.5. [6] Два 10-значных числа назовем соседними, если они различаются только одной цифрой в каком-то из разрядов. Какое наибольшее количество десятизначных чисел можно выписать так, чтобы никакие два из них не были соседними? (*Д.Калинин*)

Решение: $9{\cdot}10^8$. Рассмотрим на множестве 10-значных чисел отображение f, которое увеличивает последнюю цифру на 1, а если она равна 9, заменяет ее нулем. Заметим, что если множество M *хорошее* (т.е. состоит из попарно не соседних чисел), то и множества M, $f(M)$, $f^{(2)}(M) = f(f(M))$, …, $f^{(9)}(M)$ хорошие. Более того, эти множества попарно не пересекаются, поскольку $f^{(k)}$ переводит каждое число в соседнее.

Поэтому хорошее множество не может содержать более $^1/_{10}$ количества всех 10-значных чисел (а их $9{\cdot}10^9$). С другой стороны, если в качестве взять M множество всех 10-значных чисел с суммой цифр, кратной 10 (оно, очевидно, хорошее), то множества M, $f(M)$, …, $f^{(9)}(M)$ содержат все 10-значные числа. Следовательно, каждое из них состоит из $9{\cdot}10^8$ элементов.

Тренировочный вариант, 10-11 классы

2.1. [4] Звенья AB, BC и CD ломаной $ABCD$ равны по длине и касаются некоторой окружности с центром O. Д/ч точка K касания этой окружности со звеном BC, точка O и точка пересечения прямых AC и BD лежат на одной прямой. (*М.Макаров*)

Решение: BO – биссектриса равнобедренного тр-ка ABC $\Rightarrow$ $BO \perp AC$. Аналогично $CO \perp BD$. Таким образом, прямые CA, BD и OK – высоты тр-ка BOC.

2.2. [4] См. 1.4.

2.3. [4] Периметр выпуклого 4-угольника равен 2004, одна из диагоналей равна 1001. Может ли 2-я диагональ быть равна **а**) 1; **б**) 2; **в**) 1001? (*А.Толпыго*)

Решение:

а) Нет. Из неравенства тр-ка легко следует, что сумма диагоналей больше полупериметра.

б) Да. Рассмотрим дельтоид с диагоналями длины 1001 и 2. При движении меньшей диагонали вдоль большей от ее конца к середине пееримeтр меняется от $2 + 2\sqrt{1001^2+1} > 2004$ до $2\sqrt{1001^2+4} < 2004$. Поэтому при некотором положении диагонали периметр равен 2004.

в) Да. Рассмотрим прямоугольник с диагоналями длины 1001. При изменении угла между диагоналями от 0° до 90° периметр изменяется от 2002 до $2002\sqrt{2} > 2004$. Поэтому найдется угол, при котором периметр равен 2004.

2.4. [5] Известно, что среди членов некоторой арифметической прогрессии a_1, a_2, a_3, a_4, ... есть числа a_1^2, a_2^2 и a_3^2. Д/ч эта прогрессия состоит из целых чисел. (*А.Быстриков*)

Решение: $a_3 - a_2 = a_2 - a_1 = d$ – разность прогрессии. $a_1 + a_2 = \dfrac{a_2^2 - a_1^2}{d}$ и $a_2 + a_3 = \dfrac{a_3^2 - a_2^2}{d}$ – целые числа $\Rightarrow$ $a_3 - a_1 = 2d$ – целое, а d – целое или полуцелое. Таким же будет число $2a_1 = (a_1 + a_2) - d$. Итак, возможны 3 случая: a_1 и d (а значит, и все члены прогрессии) – целые; d – целое, a_1 – полуцелое; d – полуцелое, a_1 – дробь со знаменателем 4. Но в последних двух случаях $a_1^2 - a_1$ – не “кратно”d.

2.5. [5] См. 1.5.

Основной вариант, 9-10 классы

3.1. [4] Конечная арифметическая прогрессия состоит из целых чисел, и ее сумма – степень двойки. Докажите, что количество членов прогрессии – тоже степень двойки.
Указание: Удвоенная сумма прогрессии делится на количество членов.

3.2. [5] Какое максимальное число шашек можно расставить на доске 8×8 так, чтобы каждая была под боем? (Если поля X, Y, Z стоят одно за другим по диагонали, шашка a стоит на X, b – на Y, и поле Z свободно, то шашка b под боем).

Решение: Ответ 32. Шашки, очевидно, нельзя ставить на граничные поля (а их 28). Разобьем оставшийся квадрат 6×6 на 4 квадрата 3×3. В каждом из этих квадратов должно быть хотя бы одно свободное поле (иначе шашка, стоящая в его центре, не атакована). Итого, должны быть свободны не менее 32 полей.

32 шашки расставить можно: например, оставив свободными все граничные и 4 центральных поля.

3.3. [5] Курс акций компании “Рога и копыта” повышается или понижается каждый раз на n процентов, где n – фиксированное целое число, $0 < n < 100$ (курс вычисляется с неограниченной точностью). Существует ли n, для которого курс акций может дважды принять одно и то же значение?

Решение: ответ: «нет». Если это произошло после k повышений и l понижений, то $(100 + n)^k(100 - n)^l = 100^{k+l}$. Один из множителей в левой части четен $\Rightarrow$ n четно. По той же причине n кратно 5 $\Rightarrow$ $n = 10m$. Подставляя, получим $(10 + m)^k(10 - m)^l = 10^{k+l}$. Аналогично доказываем, что m кратно 10 $\Rightarrow$ n делится на 100. Противоречие.

3.4. [6] 2 окружности пересекаются в точках A и B. Их общая касательная (та, которая ближе к точке B) касается окружностей в точках E и F. Прямая AB пересекает прямую EF в точке M. На продолжении AM за точку M выбрана точка K так, что $KM = MA$. Прямая KE вторично пересекает окружность, содержащую точку E, в точке C. Прямая KF вторично пересекает окружность, содержащую точку F, в точке D. Доказать что точки C, D и A лежат на одной прямой.

Решение: $ME^2 = MB \cdot MA = MF^2$ $\Rightarrow$ $ME = MF$ $\Rightarrow$ $ME \cdot MF = MB \cdot MA = MB \cdot MK$ $\Rightarrow$ 4-угольник $BEKF$ вписанный.

$\angle BAC + \angle BAD = \angle BEK + \angle BFK = 180°$ $\Rightarrow$ точки C, D и A лежат на одной прямой.

3.5. [6] Имеется биллиардный стол в виде многоугольника (не обязательно выпуклого), у которого каждые соседние стороны перпендикулярны друг другу. В вершинах находятся точечные лузы, попав в которые шарик проваливается. Из вершины A с внутренним углом 90° вылетает точечный шарик и движется внутри многоугольника, отражаясь от сторон по закону "угол падения равен углу отражения". Доказать, что он никогда не вернется в вершину A.

Решение: Если шар вылетает "вдоль борта", то он сваливается в ближайшую лузу. В противном случае угол между фиксированной стороной и отрезками пути шара постоянен (он не меняется при отражениях). Существует лишь один луч "внутри" стола с таким направлением и вершиной в $A \quad \Rightarrow$ шар мог вернуться в A только по той же прямой, по которой вылетел, т.е. в этом случае 1-й и последний отрезки пути шара совпадают. Но тогда 2-й и предпоследний отрезки также совпадают… Итак, путь шара состоит из **четного** числа отрезков. Но в нужном для возврата направлении шар двигается на **нечетных** отрезках. Противоречие.

3.6. [7] Первоначально на доске написано число 2004!. 2 игрока ходят по очереди. Игрок в свой ход вычитает из написанного числа какое-нибудь натуральное число, которое имеет не более 20 простых делителей (так, чтобы разность была неотрицательна), записывает на доске эту разность, а старое число стирает. Выигрывает тот, кто получит 0. Кто из играющих – начинающий, или его соперник, – может гарантировать себе победу, и как ему следует играть?

Решение: 2-й. Пусть P – произведение 21 наименьших простых чисел. 2004! делится на P. 1-й не может вычесть число, кратное P, поэтому после его хода останется число, дающее при делении на P ненулевой остаток r. 2-й вычитает этот остаток (любое число, имеющее более 20 простых делителей, $\geq P$, поэтому r не таково) и, тем самым, снова оставляет на доске число, кратное P. Далее он повторяет эту же стратегию. 1-й не может выиграть: после каждого его хода на доске остается число, не кратное P, тем более, не равное нулю.

Основной вариант, 11-12 классы

4.1. [4] См. 3.3.

4.2. [6] Имеется биллиардный стол в виде многоугольника (не обязательно выпуклого), у которого все углы составляют целое число градусов, а угол A – в точности 1°. В вершинах находятся точечные лузы, попав в которые шарик проваливается. Из вершины A вылетает точечный шарик и движется внутри многоугольника, отражаясь от сторон по закону "угол падения равен углу отражения". Докажите, что он никогда не вернется в вершину A.

Решение: Если шар вылетает "вдоль борта", то он сваливается в ближайшую лузу.

В противном случае угол α между 1-м отрезком пути шара и стороной AB – не "целый" (меньше 1°). Если некоторый отрезок пути составляет угол φ со стороной AB, то следующий отрезок (после отражения от стороны XY) составляет со стороной AB угол $2m° - \varphi$, где m – некоторое целое число (в этом проще всего убедиться, отразив оба отрезка пути, а также сторону AB относительно прямой XY). Следовательно, *каждый* из отрезков пути составляет с AB угол вида $2n° \pm \varphi$, причем выбор знака зависит от четности. Поэтому вернуться в вершину шар может только по той же прямой, по которой вылетел, причем после **четного** числа отражений. Далее см. решение 3.5.

4.3. [6] Прямоугольная проекция треугольной пирамиды на некоторую плоскость имеет максимально возможную площадь. Доказать, что эта плоскость параллельна либо одной из граней, либо двум скрещивающимся ребрам пирамиды.

Решение: Пусть A_1, B_1, C_1, D_1 – проекции вершин A, B, C, D пирамиды. Эта проекция может быть выпуклым 4-угольником с вершинами A_1, B_1, C_1, D_1 или тр-ком (если, например, точка D_1 находится внутри тр-ка $A_1B_1C_1$). Таким образом, "максимально возможная площадь проекции" равна наибольшему из 7 чисел: наибольших значений площадей тр-ков $A_1B_1C_1$, $A_1B_1D_1$, $A_1C_1D_1$, $B_1C_1D_1$ и наибольших значений площадей 4-угольников $A_1B_1C_1D_1$, $A_1B_1D_1C_1$, $A_1C_1B_1D_1$ (возможно, невыпуклых).

Наибольшее значение $S_{A_1B_1C_1}$ достигается, когда плоскость проекции параллельна грани ABC (ибо $S_{A_1B_1C_1} = S_{ABC}\cos\alpha$, где α – угол между плоскостями $A_1B_1C_1$ и ABC).

Как известно, $S_{A_1B_1C_1D_1} = 2S_{K_1L_1M_1N_1}$, где K_1, L_1, M_1, N_1 – середины сторон A_1B_1, B_1C_1, C_1D_1, D_1A_1, т.е. проекции середин K, L, M, N ребер AB, BC, CD, DA. $KLMN$ – пар-мм, стороны которого параллельны ребрам AC и BD (см. задачу 4.6; в частности, точки K, L, M, N лежат в одной плоскости). Следовательно, $S_{A_1B_1C_1D_1} = 2S_{KLMN}\cos\alpha$ и максимальна, когда плоскость проекции параллельна плоскости $KLMN$, т.е. ребрам AC и BD.

4.4. [6] См. 3.6

4.5. [7] На плоскости даны парабола $y = x^2$ и окружность, имеющие ровно 2 общие точки: A и B. Оказалось, что касательные к окружности и параболе в точке A совпадают. Обязательно ли тогда касательные к окружности и параболе в точке B также совпадают?

Решение: Нет. Приведем контрпример. Рассмотрим окружность $(x - a)^2 + (y - b)^2 - r^2 = 0$, соответствующую условию для точек $A(1, 1)$ и $B(-3, 9)$ (такая окружность существует: ее центр находится на пересечении нормали к параболе в точке A и серединного перпендикуляра к AB).

При подстановке $y = x^2$ в уравнение окружности мы получим уравнение 4-й степени, не содержащее члена 3-й степени $\Rightarrow$ сумма корней равна нулю. Мы знаем 3 корня этого уравнения $x_{1,2} = 1$ (в силу касания этот корень кратный), $x_3 = -3$. Отсюда $x_4 = 1$, т.е. в B касания нет (корень x_3 не кратный), и других точек пересечения также нет.

Замечание для сомневающихся. Доказать, что если касательные к окружности $f(x, y) = 0$ и параболе $y = x^2$ в точке $M(x_0, x_0^2)$ совпадают, то x_0 – кратный корень уравнения $f(x, x^2) = 0$.

Заметим, что $f(x, y) - f(x, z)$ делится на $y - z$ (это видно, например, из формулы разности квадратов). Пусть $y = g(x)$ – уравнение общей касательной (g – линейная функция). Эта касательная имеет как с окружностью, так и с параболой единственную общую точку M, поэтому x_0 – кратный корень квадратных уравнений $x^2 - g(x) = 0$ и $f(x, g(x)) = 0$.

$f(x, x^2) = f(x, g(x)) + (f(x, x^2) - f(x, g(x)))$. Первое слагаемое делится на $(x - x_0)^2$, второе – на $x^2 - g(x)$, что в свою очередь делится на $(x - x_0)^2$ $\Rightarrow$ $f(x, x^2)$ делится на $(x - x_0)^2$.

4.6. Перед экстрасенсом кладут колоду из 36 карт рубашкой вверх. Он называет масть верхней карты, после чего карту открывают, показывают ему и откладывают в сторону. После этого экстрасенс называют масть следующей карты, и т.д. Задача экстрасенса – угадать масть как можно большее число раз. На деле рубашки карт несимметричны, и экстрасенс видит, в каком из 2 положений лежит верхняя карта. Колода подготовлена подкупленным служащим. Служащий знает порядок карт в колоде, и хотя изменить его не может, зато может подсказать, располагая рубашки карт так или иначе согласно договоренности.

Может ли экстрасенс с помощью такой подсказки гарантированно обеспечить угадывание масти

а) [3] более чем у половины карт?

б) [5] не менее чем у 20 карт?

Решение:

а) Да. 1-ми 2 рубашками можно “закодировать” масть 2-й карты, следующими 2-мя – масть 4-й и т.д. Когда в колоде остались 2 карты достаточно закодировать лишь их порядок, что можно сделать при помощи рубашки 35-й карты.

б) Да. Рассмотрим 17 карт: все нечётные карты, кроме 1-й и 35-й, и 2-ю карту. Среди них найдутся 5 карт одной масти. Назовём эту масть *основной*. 1-ми 2 рубашками помощник кодирует основную масть. Экстрасенс называет основную масть на каждую из указанных 17 карт, тем самым угадывая не менее 5 из них. Кроме того, по методу а) он угадает масти всех четных карт, начиная с 4-й и масть 35-й карты. Итого, 17 + 5 = **23**.

2-й способ. 1-ми 2 рубашками кодируется масть **2-й** карты, если 24-я карта **красная**, и **3-й**, если 24-я карта – **черная**. Экстрасенс называет эту масть и на 2-ю и на 3-ю карту. Если они одной масти, то он угадывает обе, если же разной – то одну, но при этом узнает цвет 24-й карты. В дальнейшем рубашкой 24-й карты кодируется недостающая информация о ней. Так из 3 карт – 2-й, 3-й и 24-й – угадываются, как минимум, две.

Аналогично, угадываются по две из 4-й, 5-й и 25-й карт (используются 3-я и 4-я рубашки); …, из 22-й, 23-й и 34-й карт. Итого 22 карты + (см. а)) 2 последние – **24** карты.